11. cvičení - Fourierovy řady

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Příklady

1. Rozviňte funkci do Fourierovy řady. Rozhodněte, zda řada konverguje stejnoměrně (lok. stejnoměrně) na největších možných podintervalech $[0, 2\pi]$ (příp. $\mathbb{R}$) a určete její součet. Určete pak součet zadaných číselných řad.

   (a) $f(x) = \operatorname{sgn} x,\ x \in (-\pi, \pi]$, $\quad \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$

   Řešení:

   - Máme $V(f, -\pi, \pi) = 4$, tedy $f \in BV[-\pi, \pi]$.
   - Funkce f je lichá, tedy $a_n = 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$. Pro b_n máme

   $$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 1 \cdot \sin(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\left[\frac{-\cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}\frac{1}{n}((-1)^{n+1} + 1)$$

   - Fourierova řada je pak tvaru

   $$s^f = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi}\frac{1}{n}((-1)^{n+1} + 1)\sin(nx) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin((2n-1)x)}{2n-1}$$

   - Z Jordan-Dirichletova kritéria pak plyne, že na $[-\pi, \pi]$ je

   $$s^f = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}.$$

   Navíc $s_n^f \overset{loc}{\rightrightarrows}$ na $(-\pi, 0)$ a $(0, \pi)$. (Na $[-\pi, \pi]$ je lok. stejnoměrná konvergence vyloučena, protože f je tam nespojitá.)

   - Z výše uvedeného dostáváme, že

   $$1 = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin((2n-1)\frac{\pi}{2})}{2n-1} = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$$

   Odtud

   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} = \frac{\pi}{4}$$

   (b) $f(x) = \cos^6 x,\ x \in (-\pi, \pi]$

   Řešení:

   - Máme $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.
   - Dále ze vzorců $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$ a $2\cos a \cos b = (\cos(a-b) + \cos(a+b)$ lze

odvodit

$$
\begin{aligned}
\cos^6 x &= \frac{1}{8}(1+\cos 2x)^3 = \frac{1}{8}\left(1+3\cos 2x+3\cos^2 2x+\cos^3 2x\right) \\
&= \frac{1}{8}\left(1+3\cos 2x+3\frac{1}{2}(1+\cos 4x)+\cos 2x\cdot\frac{1}{2}(1+\cos 4x)\right) \\
&= \frac{1}{8}\left(\frac{5}{2}+\frac{7}{2}\cos 2x+\frac{3}{2}\cos 4x+\frac{1}{2}(\cos 2x\cos 4x)\right) \\
&= \frac{1}{8}\left(\frac{5}{2}+\frac{7}{2}\cos 2x+\frac{3}{2}\cos 4x+\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{2}\cos 6x)\right) \\
&= \frac{5}{16}+\frac{15}{32}\cos 2x+\frac{3}{16}\cos 4x+\frac{1}{32}\cos 6x
\end{aligned}
$$

- Protože funkce sama je trigonometrickým polynomem, tak Fourierova řada s funkcí splývá (plyne např. z Faktů ze cvičení). Tedy

  $$s^f = \frac{5}{16}+\frac{15}{32}\cos 2x+\frac{3}{16}\cos 4x+\frac{1}{32}\cos 6x$$

  Z Diniho věty navíc plyne

  $$f = \frac{5}{16}+\frac{15}{32}\cos 2x+\frac{3}{16}\cos 4x+\frac{1}{32}\cos 6x$$

  Máme $V(f,-\pi,\pi)=4$, tedy $f\in BV[-\pi,\pi]$. Z Jordan-Dirichletova kritéria pak plyne, že na $[-\pi,\pi]$ je $s_n^f \overset{loc}{\rightrightarrows}$ na (a,b) pro každé $\mathbb{R}$.

(c) $f(x)=\begin{cases}0, & x\in(-\pi,0]\\ x, & x\in(0,\pi].\end{cases}$

Řešení:

- Máme $V(f,-\pi,\pi)=2\pi$, tedy $f\in BV[-\pi,\pi]$.
- Pro a_n máme

  $$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^\pi=\frac{\pi}{2}.$$

  a z per partes

  $$
  \begin{aligned}
  a_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi x\cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left(\left[\frac{1}{n}x\sin nx\right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{1}{n}\sin nx\,\mathrm{d}x\right) \\
  &= \frac{1}{\pi}\left(\left[\frac{1}{n}x\sin nx+\frac{1}{n^2}\cos nx\right]_0^\pi\right) = \frac{1}{n^2\pi}((-1)^n-1)
  \end{aligned}
  $$

  a

  $$
  \begin{aligned}
  b_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi x\sin nx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left(\left[-\frac{1}{n}x\cos nx\right]_0^\pi + \int_0^\pi \frac{1}{n}\cos nx\,\mathrm{d}x\right) \\
  &= \frac{1}{\pi}\left(\left[-\frac{1}{n}x\cos nx+\frac{1}{n^2}\sin nx\right]_0^\pi\right) = -\frac{1}{n}(-1)^n
  \end{aligned}
  $$

- Fourierova řada je pak tvaru

  $$s^f=\frac{\pi}{4}+\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2\pi}((-1)^n-1)\cos(nx)-\frac{1}{n}(-1)^n\sin(nx)$$

- Z Jordan-Dirichletova kritéria pak plyne, že na $[-\pi, \pi]$ je

$$s^f = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}.$$

Navíc $s_n^f \overset{loc}{\rightrightarrows}$ na $(-\pi, \pi)$.

(d) $f(x) = \pi^2 - x^2$, $x \in (-\pi, \pi]$, $\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$

Řešení:

- Máme $V(f, -\pi, \pi) = 2\pi^2$, tedy $f \in BV[-\pi, \pi]$.
- Funkce f je sudá, tedy $b_n = 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Pro a_n máme

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \pi^2 - x^2 \,\mathrm{d}x = \left[\pi^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_0^{\pi} = \frac{4}{3}\pi^2.$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi^2 - x^2) \cos(nx) \,\mathrm{d}x \\ &= 2\pi \left[\frac{\sin(nx)}{n}\right]_0^{\pi} - \frac{2}{\pi} \left[\frac{x^2 \sin(nx)}{n}\right]_0^{\pi} + \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{2x \sin nx}{n} \,\mathrm{d}x \\ &= \frac{4}{n\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx \,\mathrm{d}x = \frac{4}{n\pi} \left[\frac{-x \cos nx}{n}\right]_0^{\pi} + \frac{4}{n\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{n} \cos nx \,\mathrm{d}x \\ &= \frac{-4}{n\pi} \cdot \frac{\pi \cos n\pi}{n} = \frac{4(-1)^{n+1}}{n^2} \end{aligned}$$

- Fourierova řada je pak tvaru

$$s^f = \frac{2}{3}\pi^2 + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \cos nx$$

- Protože f je spojitá na $\mathbb{R}$, tak z Jordan-Dirichletova kritéria pak plyne, že na $\mathbb{R}$ je

$$s^f = f(x).$$

Navíc $s_n^f \overset{loc}{\rightrightarrows}$ na $\mathbb{R}$.

- Z výše uvedeného dostáváme, že

$$\pi^2 = f(0) = \frac{2}{3}\pi^2 + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \cos n0 = \frac{2}{3}\pi^2 + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$$

Odtud

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

Analogicky

$$0 = f(\pi) = \frac{2}{3}\pi^2 + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{n^2}.$$

Odtud

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

(e) ❄ $f(x) = e^x$, $x \in (-\pi, \pi]$, $\quad \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1}$

Řešení:

- Dodefinujme f jako $f((2k+1)\pi) = \frac{1}{2}(e^{\pi} + e^{-\pi})$. Pak máme $V(f, -\pi, \pi) = 2(e^{\pi} - e^{-\pi})$, tedy $f \in BV[-\pi, \pi]$.
- Pro a_n máme
$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^x \, \mathrm{d}x = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{\pi}$$
Dále označme $I_n = \int_{-\pi}^{\pi} e^x \cos nx$, $n \in \mathbb{N}$ a z per partes
$$\begin{aligned} I_n &= [e^x \cos(nx)]_{-\pi}^{\pi} + n \int_{-\pi}^{\pi} e^x \sin nx \, \mathrm{d}x \\ &= \cos(n\pi)(e^{\pi} - e^{-\pi}) + n \left([e^x \sin nx]_{-\pi}^{\pi} - n \int_{-\pi}^{\pi} e^x \cos nx \, \mathrm{d}x \right) \\ &= \cos(n\pi)(e^{\pi} - e^{-\pi}) - n^2 I_n. \end{aligned}$$
Odtud
$$I_n = (-1)^n \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{1 + n^2}$$
a tedy
$$a_n = (-1)^n \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{\pi(1 + n^2)}$$
Analogicky (lze odvodit i z výpočtů výše) vyjde
$$b_n = (-1)^{n+1} n \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{\pi(1 + n^2)}$$
- Fourierova řada je pak tvaru
$$s^f = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{\pi(1 + n^2)} \cos(nx) + (-1)^{n+1} n \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{\pi(1 + n^2)} \sin(nx)$$
- Z Jordan-Dirichletova kritéria pak plyne, že na $[-\pi, \pi]$ je
$$s^f = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}.$$
Navíc $s_n^f \overset{loc}{\rightrightarrows}$ na $(-\pi, \pi)$.
- Z výše uvedeného dostáváme
$$1 = f(0) = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{\pi(1 + n^2)} \cos(n0) + (-1)^{n+1} n \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{\pi(1 + n^2)} \sin(n0)$$
Odtud
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1 + n^2} = \left(1 - \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2\pi}\right) \frac{\pi}{e^{\pi} - e^{-\pi}} = \frac{\pi}{e^{\pi} - e^{-\pi}} - \frac{1}{2}$$

(f) ✻$f(x) = \sin(3x) + 4x,\ x \in (-\pi, \pi]$, $\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \sin n}{n}$

Řešení:

- Funkce $4x$ je monotónní a funkce $\sin(3x)$ je po částech monotónní na intervalu $[-\pi, \pi]$. Tedy $f \in BV[-\pi, \pi]$.
- Funkce je lichá, tedy $a_n = 0$ pro $n \in \mathbb{N}_0$.
  Pro b_n máme:
  $$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(3x) \sin(nx) \, \mathrm{d}x = \begin{cases} 1, & n = 3, \\ 0, & n \neq 3. \end{cases}$$
  Dále
  $$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} 4x \sin 3x \, \mathrm{d}x = \frac{8}{\pi} \left[-\frac{\cos nx}{n} \right]_0^{\pi} + \frac{8}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\cos nx}{n} \, \mathrm{d}x = (-1)^{n+1} \frac{8}{n}$$
- Fourierova řada je pak tvaru
  $$s^f = \sin 3x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx.$$
- Z Jordan-Dirichletova kritéria pak plyne, že na $[-\pi, \pi]$ je
  $$s^f = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}.$$
  Navíc $s_n^f \overset{loc}{\rightrightarrows}$ na $(-\pi, \pi)$.
- Z výše uvedeného dostáváme
  $$\sin 3 + 4 = f(1) = \sin 3 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin n.$$
  Odtud
  $$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin n}{n} = \frac{1}{2}$$

(g) $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0, \pi) \\ 0, & x \in (\pi, 2\pi) \\ \frac{1}{2}, & x = 0, \pi, 2\pi \end{cases}$

Řešení:

- Máme $V(f, -\pi, \pi) = 2$, tedy $f \in BV[-\pi, \pi]$.
- Pro a_n máme
  $$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 1 \, \mathrm{d}x = 1.$$
  Dále
  $$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos nx \, \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{n} \sin nx \right]_0^{\pi} = 0$$
  a
  $$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin nx \, \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \left[-\frac{1}{n} \cos nx \right]_0^{\pi} = -\frac{(-1)^n - 1}{n\pi}$$

- Fourierova řada je pak tvaru

$$s^f = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{(-1)^n - 1}{n\pi} \sin nx$$

- Z Jordan-Dirichletova kritéria pak plyne, že na $[-\pi, \pi]$ je

$$s^f = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}.$$

Navíc $s_n^f \overset{loc}{\rightrightarrows}$ na $(0, \pi)$ a $(\pi, 2\pi)$.

(h) ✿ $f(x) = x^2$ $x \in [0, 2\pi)$,

Řešení:

- Máme $V(f, 0, 2\pi) = 8\pi^2$, tedy $f \in BV[0, 2\pi]$.
- Pro a_n máme

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x^2 \, dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{2\pi} = \frac{8}{3}\pi^2.$$

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x^2 \cos(nx) \, dx \\
&= \frac{1}{\pi} \left[\frac{x^2 \sin(nx)}{n}\right]_0^{2\pi} - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{2x \sin nx}{n} \, dx \\
&= \frac{-2}{n\pi} \int_0^{2\pi} x \sin nx \, dx = \frac{2}{n\pi} \left[\frac{x \cos nx}{n}\right]_0^{2\pi} + \frac{-2}{n\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{n} \cos nx \, dx \\
&= \frac{4\pi}{\pi n^2} - \frac{2}{n^3\pi} \left[\sin nx\right]_0^{2\pi} \\
&= \frac{4}{n^2}
\end{aligned}$$

Analogicky pro

$$b_n = -\frac{4\pi}{n}.$$

- Fourierova řada je pak tvaru

$$s^f = \frac{4}{3}\pi^2 + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos nx - \frac{\pi}{n} \sin nx.$$

- Z Jordan-Dirichletova kritéria pak plyne, že na $[-\pi, \pi]$ je

$$s^f = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}.$$

Navíc $s_n^f \overset{loc}{\rightrightarrows}$ na $(0, 2\pi)$.

2. Zkouškové písemky doc. Rokyty https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~rokyta/vyuka/ a prof. Picka https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~pick/
Příklady převzaty i s řešením.

(a) ♡ $f(x) = |\cos\frac{x}{2}|$ na $\mathbb{R}$. Rozviňte tuto funkci do 2π-periodické Fourierovy řady. Určete, k jaké funkci konverguje výsledná řada a proč. Dosazením $x = \pi$ sečtěte příslušnou číselnou řadu.

(b) ❄ $f(x) = 0$ na $(-\pi, -\frac{\pi}{2})$, $f(x) = x$ na $(0, \frac{\pi}{2})$, je sudá a 2π-periodická. Rozviňte funkci do 2π-periodické Fourierovy řady. Určete, k jaké funkci konverguje výsledná řada a jak (konverguje stejnoměrně?). Dosaďte $x = \frac{\pi}{2}$ a sečtěte příslušnou číselnou řadu.

(c) Nalezněte 2π-periodickou funkci f, která je na intervalu $(-\pi, \pi]$ definována předpisem

$$f(t) = \begin{cases} 2t, & t \in (-\pi, 0), \\ t, & t \in [0, \pi]. \end{cases}$$

Spočtěte Fourierovu řadu s^f funkce f. Určete, pro která $t \in \mathbb{R}$ konverguje s^f bodově a v těchto bodech určete její součet. Nalezněte maximální intervaly, na nichž s^f konverguje lokálně stejnoměrně. Pomocí této řady sečtěte číselnou řadu

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}.$$

(d) Nalezněte 2π-periodickou funkci f, která je na intervalu $(-\pi, \pi]$ definována předpisem

$$f(t) = \frac{\pi}{2} - \left| |t| - \frac{\pi}{2} \right|$$

Spočtěte Fourierovu řadu s^f funkce f. Určete, pro která $t \in \mathbb{R}$ konverguje s^f bodově a v těchto bodech určete její součet. Rozhodněte, zda s^f konverguje stejnoměrně na $\mathbb{R}$. Pomocí této řady sečtěte číselnou řadu

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2}.$$

3. K jaké funkci konverguje následující funkce? Zakreslete.

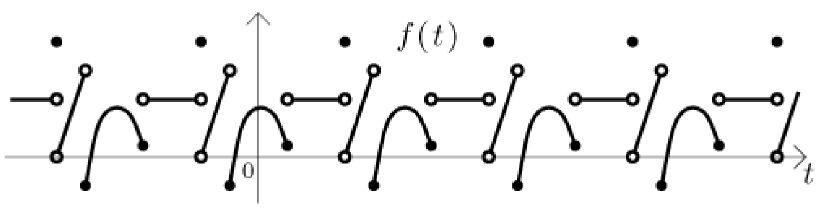

Figure 1: http://math.feld.cvut.cz/mt/txte/3/txc3ea3f.htm

2a

---

4. [8b] Mějme $f(x) = |\cos \frac{x}{2}|$ na $\mathbb{R}$.

1. Rozviňte tuto funkci do 2π-periodické Fourierovy řady. Určete, k jaké funkci konverguje výsledná řada a proč.
2. Dosazením $x = \pi$ sečtěte příslušnou číselnou řadu.
3. Napište Parsevalovu rovnost pro funkci f a výpočtem určitého integrálu v ní sečtěte příslušnou číselnou řadu.

Řešení: Funkce je sudá a na intervalu $\langle -\pi, \pi\rangle$ se rovná funkci $\cos \frac{x}{2}$. Proto

$$b_n = 0\,, \qquad a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos\frac{x}{2}\,dx = \frac{2}{\pi}\left[2\sin\frac{x}{2}\right]_0^\pi = \frac{4}{\pi}\,,$$

a (v první rovnosti využijeme $2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)$):

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos\frac{x}{2}\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos x\left(n+\frac{1}{2}\right) + \cos x\left(n-\frac{1}{2}\right)dx = \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{2}{2n+1}\sin x\left(n+\frac{1}{2}\right) + \frac{2}{2n-1}\sin x\left(n-\frac{1}{2}\right)\right]_0^\pi = \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{2}{2n+1}\underbrace{\sin\pi\left(n+\tfrac{1}{2}\right)}_{=(-1)^n} + \frac{2}{2n-1}\underbrace{\sin\pi\left(n-\tfrac{1}{2}\right)}_{=(-1)^{n+1}}\right) = \\
&= \frac{2}{\pi}(-1)^n\left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n-1}\right) = \frac{2}{\pi}(-1)^n\frac{(-2)}{4n^2-1} = \frac{4}{\pi}\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}\,.
\end{aligned}$$

Fourierova řada má proto tvar

$$F_f(x) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}\cos nx\,,$$

a protože zadaná funkce po částech $\mathcal{C}^1$ s vlastními jednostrannými limitami hodnot funkce i derivací ve všech „hrotech“, a navíc je spojitá na celém $\mathbb{R}$, konverguje Fourierova řada bodově pro všechna $x \in \mathbb{R}$ a platí $F_f(x) = f(x)$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$.
Dosazení bodu $x = \pi$ dává

$$0 = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}(-1)^n\,,$$

tedy po úpravě

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}\,.$$

Parsevalova rovnost (v našem případě $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^\pi |f(x)|^2\,dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^\infty a_n^2$) dává:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos^2\frac{x}{2}\,dx = \frac{8}{\pi^2} + \frac{16}{\pi^2}\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(4n^2-1)^2}\,,$$

tedy po úpravě

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(4n^2-1)^2} = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2}\,.$$

---

4. [7b] Funkce f splňuje: $f(x) = 0$ na $(-\pi, -\pi/2)$, $f(x) = x$ na $(0, \pi/2)$, navíc je sudá a 2π-periodická na $\mathbb{R}$. Rozviňte ji do Fourierovy řady, určete, jakým způsobem tato řada konverguje a k jaké funkci. Dosazením $x = \frac{\pi}{2}$ do Fourierovy řady sečtěte příslušnou číselnou řadu.

Řešení: Ze sudosti dostáváme

$$b_n = 0\,, \qquad a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\,dx = \frac{\pi}{4}\,,$$

a dále

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos nx\,dx = \cdots = \frac{1}{\pi n^2}\left(2\cos\frac{\pi n}{2} + \pi n\sin\frac{\pi n}{2} - 2\right)\,.$$

Fourierova řada má proto tvar

$$F_f(x) = \frac{\pi}{8} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi n^2}\left(2\cos\frac{\pi n}{2} + \pi n\sin\frac{\pi n}{2} - 2\right)\cos nx\,,$$

a protože zadaná funkce (označme ji $\widetilde{f}$) je funkce po částech $\mathcal{C}^1$ s vlastními jednostrannými limitami hodnot funkce i derivací ve všech bodech nespojitosti, konverguje Fourierova řada bodově pro všechna $x \in \mathbb{R}$ a platí

$$F_f(x) = \frac{\widetilde{f}(x+) + \widetilde{f}(x-)}{2} \quad \text{pro všechna } x \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Při dosazení bodu $x = \frac{\pi}{2}$ do (3) tedy na pravé straně rovnosti dostaneme $\frac{\pi}{4}$, načež dostaneme

$$\frac{\pi}{8} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi n^2}\left(2\cos\frac{\pi n}{2} + \pi n\sin\frac{\pi n}{2} - 2\right)\cos\frac{\pi n}{2} = \frac{\pi}{4}\,.$$

Protože $\sin\frac{\pi n}{2}\cos\frac{\pi n}{2} = \frac{1}{2}\sin\pi n = 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, máme odtud

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2\frac{\pi n}{2} - \cos\frac{\pi n}{2}}{n^2} = \frac{\pi^2}{16}\,,$$

což je jedna z možných forem výsledku. Je však možno si ještě uvědomit, že výraz $\cos^2\frac{\pi n}{2} - \cos\frac{\pi n}{2}$ je nenulový pouze pro $n = 4k+2$, a pak má hodnotu 2, tedy

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{(4k+2)^2} = \frac{\pi^2}{16} \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}\,,$$

což je jednodušší a přehlednější forma výsledku.

2c

Příklad A3. Nalezněte 2π-periodickou funkci f, která je na $(-\pi,\pi]$ definována předpisem
$$f(t)=\begin{cases} t, & t\in[0,\pi] \\ 2t, & t\in(-\pi,0). \end{cases}$$

Spočtěte Fourierovu řadu f. Určete, pro která $t\in\mathbb{R}$ konverguje tato řada a určete její součet. Nalezněte maximální intervaly, na nichž tato řada konverguje lokálně stejnoměrně. S pomocí této řady určete součet číselné řady $\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{(2j+1)^2}$.

Řešení! předpis f na $\mathbb{R}$

$$f(t)=\begin{cases} t-2k\pi, & t\in[2k\pi,(2k+1)\pi] \\ 2(t-2k\pi), & t\in((2k-1)\pi, 2k\pi) \end{cases}$$

výpočet Fourierových koeficientů

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}2t\,dt+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}t\,dt=\frac{2}{\pi}\left[\frac{t^2}{2}\right]_{-\pi}^{0}+\frac{1}{\pi}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{\pi}$$
$$=\frac{1}{\pi}(0-\pi^2)+\frac{1}{2\pi}(\pi^2-0)=-\pi+\frac{\pi}{2}=-\frac{\pi}{2}$$

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}2t\cos(kt)\,dt+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}t\cos(kt)\,dt$$
$$=\frac{2}{\pi}\left(\left[t\,\frac{\sin(kt)}{k}\right]_{-\pi}^{0}-\int_{-\pi}^{0}\frac{\sin(kt)}{k}\,dt\right)+\frac{1}{\pi}\left(\left[\frac{t\sin(kt)}{k}\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\frac{\sin(kt)}{k}\,dt\right)$$
$$=\frac{2}{\pi}\left(0-\frac{1}{k}\left[-\frac{\cos(kt)}{k}\right]_{-\pi}^{0}\right)+\frac{1}{\pi}\left(0-\frac{1}{k}\left[-\frac{\cos(kt)}{k}\right]_0^{\pi}\right)$$
$$=\frac{2}{\pi k^2}\left(1-\cos(-k\pi)\right)+\frac{1}{\pi k^2}\left(\cos(k\pi)-1\right)=\frac{1}{\pi k^2}\left(2-2(-1)^k+(-1)^k-1\right)$$
$$=\frac{1}{\pi k^2}\left(1-(-1)^k\right)=\frac{1-(-1)^k}{\pi k^2}=\begin{cases}\frac{2}{\pi(2j+1)^2}, & k=2j+1,\ j\in\mathbb{N}\cup\{0\} \\ 0, & k=2j,\ j\in\mathbb{N}\end{cases}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} 2t\sin(kt)\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} t\sin(kt)\,dt =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\left[t\left(-\frac{\cos(kt)}{k}\right)\right]_{-\pi}^{0} - \int_{-\pi}^{0} -\frac{\cos(kt)}{k}\,dt\right) + \frac{1}{\pi}\left(\left[t\left(-\frac{\cos(kt)}{k}\right)\right]_{0}^{\pi} - \int_{0}^{\pi} -\frac{\cos(kt)}{k}\,dt\right)$$

$$= \frac{2}{\pi}\cdot\frac{(-1)^k}{k}(-\pi) + \frac{2}{\pi k}\left[\frac{\sin(kt)}{k}\right]_{-\pi}^{0} + \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{k}(-1)^{k+1} + \left[\frac{\sin(kt)}{k^2}\right]_{0}^{\pi}\right)$$

$$= -\frac{2(-1)^k}{k} - \frac{(-1)^k}{k} = \frac{3(-1)^{k+1}}{k}.$$

Fourierova řada

$$s^f(t) = -\frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\cos((2j+1)t)}{(2j+1)^2} + 3\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\sin(kt), \quad t\in\mathbb{R}$$

Konvergence Fourierovy řady

- f je rostoucí na $(-\pi,\pi)$, takže $f\in BV([-\pi,\pi])$, tedy podle Jordanova-Dirichletova kritéria s^f konverguje na $\mathbb{R}$ a platí
$$s^f(t) = \frac{f(t+)+f(t-)}{2}, \quad t\in\mathbb{R}.$$
- f je navíc spojitá na každém intervalu $((2k-1)\pi,(2k+1)\pi)$, $k\in\mathbb{Z}$, a tedy $s_n^f \overset{loc}{\rightrightarrows} f$ na těchto intervalech. Tyto intervaly jsou maximální, protože $f((2k-1)\pi-)=\pi$, $f((2k-1)\pi+)=-2\pi$, takže f není spojitá v $(2k-1)\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. Maximalita intervalů tedy plyne z Mooreovy-Osgoodovy věty.

Číselná řada

Položme $t=0$. Potom f je spojitá v t a $\sin(kt)=0$ $\forall k\in\mathbb{N}$. Tedy

$$0 = -\frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{(2j+1)^2}, \quad \text{takže} \quad \sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{(2j+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

2d)

Příklad C3. Nalezněte 2π-periodickou funkci f, která je na $(-\pi,\pi]$ definována předpisem

$$f(t) = \frac{\pi}{2} - \left| |t| - \frac{\pi}{2} \right| .$$

Spočtěte Fourierovu řadu s^f funkce f. Určete, pro která $t \in \mathbb{R}$ konverguje s^f bodově a v těchto bodech určete její součet. Rozhodněte, zda s^f konverguje stejnoměrně na $\mathbb{R}$. Pomocí této řady sečtěte číselnou řadu $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

Svá tvrzení zdůvodněte.

Řešení: Položme

$$f(t) = \frac{\pi}{2} - \left| |t-2l\pi| - \frac{\pi}{2} \right| , \quad t \in (-\pi+2l\pi, \pi+2l\pi], \ l \in \mathbb{Z}.$$

Potom $f \in P^{2\pi}$ a f je sudá. Pro její Fourierovy koeficienty tedy platí $b_k = 0$, $k \in \mathbb{N}$, a

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos(kt)\, dt , \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Tedy

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t)\, dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} t\, dt + \frac{2}{\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} (\pi - t)\, dt$$

$$= \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} t\, dt = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{2},$$

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} t\cos(kt)\,dt + \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi} (\pi-t)\cos(kt)\,dt$$

$$= \quad I \quad + \quad II \quad ,$$

Substituce v II: $\quad s=\pi-t$, $\quad ds=-dt$, $\quad \begin{array}{c|c|c} t & \pi/2 & \pi \\ \hline s & \pi/2 & 0 \end{array}$, $\quad t=\pi-s$

$$\cos(kt) = \cos(k(\pi-s)) = \cos(k\pi - ks) =$$

$$= \cos(k\pi)\cos(ks) + \sin(k\pi)\sin(ks)$$

$$= (-1)^k \cos(ks),$$

takže

$$II = \frac{2}{\pi}(-1)^k \int_0^{\pi/2} s\cos(ks)\,ds,$$

a tedy

$$a_k = \frac{2}{\pi}\left(1+(-1)^k\right)\int_0^{\pi/2} t\cos(kt)\,dt.$$

Odtud dostáváme

$$a_k = \begin{cases} 0 & \text{pro } k \text{ liché} \\ \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} t\cos(kt) & \text{pro } k \text{ sudé}, \end{cases}$$

to jest

$$a_k = \begin{cases} 0 & \text{pro } k=2j+1,\ j\in\mathbb{N}\cup\{0\}, \\ \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} t\cos(2jt)\,dt, & k=2j,\ j\in\mathbb{N}. \end{cases}$$

Pro $j\in\mathbb{N}$ platí

$$\int_0^{\pi/2} t\cos(2jt)\,dt = \left[t\,\frac{\sin(2jt)}{2j}\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2}\frac{\sin(2jt)}{2j}\,dt$$

$$= \frac{\pi}{2}\cdot\frac{\sin(\pi j)}{2j} - \left[-\frac{\cos(2jt)}{4j^2}\right]_0^{\pi/2}$$

$$= 0 + \frac{\cos(\pi j)-1}{4j^2}$$

$$= \frac{(-1)^j-1}{4j^2} = \begin{cases} 0 & \text{pro } j=2m,\ m\in\mathbb{N}, \\ -\dfrac{1}{2j^2} & \text{pro } j=2m+1,\ m\in\mathbb{N}\cup\{0\}. \end{cases}$$

Tedy $a_{4m+2} = \frac{4}{\pi}\cdot\frac{-1}{2(2m+1)^2} = -\frac{2}{\pi(2m+1)^2}$, $m\in\mathbb{N}\cup\{0\}$,

$a_k = 0$ pro $k = 4m, 4m+1, 4m+3$, $m\in\mathbb{N}\cup\{0\}$.

Odtud dostáváme

$$s^f(t) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\cos((4m+2)t)}{(2m+1)^2}, \quad t\in\mathbb{R}.$$

Protože f je po částech monotónní na $[-\pi,\pi]$, platí $f\in BV([-\pi,\pi])$. Navíc je f spojitá na $\mathbb{R}$.

Podle Jordanova-Dirichletova kritéria tedy platí $s_n^f \rightrightarrows f$ na $[-\pi,\pi]$, a tedy díky periodicitě f platí $s_n^f \rightrightarrows f$ na $\mathbb{R}$.

Platí tedy

$$\frac{\pi}{2} - \left|\, |t| - \frac{\pi}{2} \right| = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\cos\left((4m+2)t\right)}{(2m+1)^2}, \; t \in \mathbb{R}.$$

Položme $t=0$. Dostaneme

$$0 = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2},$$

a tedy $$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

3