



11. cvičení - Fourierovy řady

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Teorie

Definice 1. Necht $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je 2π -periodická funkce taková, že $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| dx < \infty$. Čísla

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx, \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx, \quad k \in \mathbb{N},$$

se nazývají *Fourierovy koeficienty funkce f* .

Řadu

$$\mathcal{S}f = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

nazýváme *Fourierovou řadou funkce f* . Píšeme $\mathcal{S}f \sim f$.

($\mathcal{S}_n f = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos kx + b_k \sin kx$, jde o částečné součty.)

Věta 2 (Jordanovo – Dirichletovo kritérium). Necht $f \in \mathcal{P}([0, 2\pi])$ je funkce s **konečnou variací** na intervalu $[0, 2\pi]$.

1. Necht $x \in \mathbb{R}$. Pak má funkce f v bodě x vlastní limitu zleva $f(x-)$ i zprava $f(x+)$ a platí

$$\mathcal{S}f(x) = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}.$$

2. Je-li navíc f **spojitá** na otevřeném intervalu (a, b) , pak

$$\mathcal{S}_n f \xrightarrow{loc} f \quad \text{na } (a, b).$$

Věta 3 (Dini). Necht $f \in \mathcal{P}([0, 2\pi])$ je funkce a $x \in \mathbb{R}$. Existují-li vlastní jednostranné limity $f(x-)$ a $f(x+)$ a také vlastní limity

$$\lim_{t \rightarrow x-} \frac{f(t) - f(x-)}{t - x}, \quad \lim_{t \rightarrow x+} \frac{f(t) - f(x-)}{t - x},$$

pak

$$\mathcal{S}f = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}.$$

Speciálně, pokud f má **konečné jednostranné derivace** v x , pak $\mathcal{S}f(x) = f(x)$.

Poznámka 4. Je-li funkce $f \in \mathcal{P}([0, 2\pi])$ po částech **monotónní** na (a, b) nebo po částech **třídy $\mathcal{C}^1$** na (a, b) , pak pro každé $x \in (a, b)$ platí

$$\mathcal{S}f(x) = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}.$$

Fakta

Pro $m, n \in \mathbb{N}_0$:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sin nx \, dx &= \int_0^{2\pi} \cos mx \, dx = 0, \quad m, n \geq 1, & \int_0^{2\pi} \sin nx \cos mx \, dx &= 0, \\ \int_0^{2\pi} \sin nx \sin mx \, dx &= \int_0^{2\pi} \cos nx \cos mx \, dx = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ \pi, & n = m. \end{cases} \end{aligned}$$

Algoritmus

1. **Náčrtne**me funkci včetně jejího 2π -periodického rozšíření.
2. Spočteme a_0, a_n, b_n (dáváme pozor na **podmínky**). Není funkce **sudá/lichá**?
3. Sestavíme **Fourierovu řadu**.
4. Zkontrolujeme původní funkci. Je spojitá? Je BV ? Je $\mathcal{C}^1$? Z vět pak vyplyne **konvergence** Fourierovy řady.
 - (a) Jestliže $\mathcal{S}f \rightrightarrows f$ na $[-\pi, \pi]$, tak i $\mathcal{S}f \rightrightarrows f$ na $\mathbb{R}$ (plyne z periodičnosti).
 - (b) Je-li f nespojitá, tak $\mathcal{S}f \not\rightrightarrows f$ na $[-\pi, \pi]$. (Trigonometrické polynomy jsou spojitě funkce, tedy jejich součet by při stejnoměrné konvergenci byl také spojitá funkce, což je spor.)
5. **Dosadíme** vhodný bod do číselné řady a využijeme konvergenci.

Příklady

1. Rozviňte funkci do Fourierovy řady. Rozhodněte, zda řada konverguje stejnoměrně (lok. stejnoměrně) na největších možných podintervalech $[0, 2\pi]$ (příp. $\mathbb{R}$) a určete její součet. Určete pak součet zadaných číselných řad.

(a) $f(x) = \operatorname{sgn} x, x \in (-\pi, \pi], \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$

(b) $\heartsuit f(x) = \cos^6 x, x \in (-\pi, \pi]$

(c) $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\pi, 0] \\ x, & x \in (0, \pi]. \end{cases}$

(d) $f(x) = \pi^2 - x^2, x \in (-\pi, \pi], \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$

(e) $\ast f(x) = e^x, x \in (-\pi, \pi], \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + 1}$

(f) $\ast f(x) = \sin(3x) + 4x, x \in (-\pi, \pi], \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \sin n}{n}$

(g) $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0, \pi) \\ 0, & x \in (\pi, 2\pi) \\ \frac{1}{2}, & x = 0, \pi, 2\pi \end{cases}$

(h) $\wp f(x) = x^2, x \in [0, 2\pi),$

2. Zkouškové písemky doc. Rokyty <https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~rokyta/vyuka/>
a prof. Pícká <https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~pick/>

(a) $\heartsuit f(x) = |\cos \frac{x}{2}|$ na $\mathbb{R}$. Rozviňte tuto funkci do 2π -periodické Fourierovy řady. Určete, k jaké funkci konverguje výsledná řada a proč. Dosazením $x = \pi$ sečtěte příslušnou číselnou řadu.

(b) $\ast f(x) = 0$ na $(-\pi, -\frac{\pi}{2})$, $f(x) = x$ na $(0, \frac{\pi}{2})$, je sudá a 2π -periodická. Rozviňte funkci do 2π -periodické Fourierovy řady. Určete, k jaké funkci konverguje výsledná řada a jak (konverguje stejnoměrně?). Dosaďte $x = \frac{\pi}{2}$ a sečtěte příslušnou číselnou řadu.

(c) Nalezněte 2π -periodickou funkci f , která je na intervalu $(-\pi, \pi]$ definována předpisem

$$f(t) = \begin{cases} 2t, & t \in (-\pi, 0), \\ t, & t \in [0, \pi]. \end{cases}$$

Spočtěte Fourierovu řadu s^f funkce f . Určete, pro která $t \in \mathbb{R}$ konverguje s^f bodově a v těchto bodech určete její součet. Nalezněte maximální intervaly, na nichž s^f konverguje lokálně stejnoměrně. Pomocí této řady sečtěte číselnou řadu

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}.$$

(d) Nalezněte 2π -periodickou funkci f , která je na intervalu $(-\pi, \pi]$ definována předpisem

$$f(t) = \frac{\pi}{2} - \left| t - \frac{\pi}{2} \right|$$

Spočtěte Fourierovu řadu s^f funkce f . Určete, pro která $t \in \mathbb{R}$ konverguje s^f bodově a v těchto bodech určete její součet. Rozhodněte, zda s^f konverguje stejnoměrně na $\mathbb{R}$. Pomocí této řady sečtěte číselnou řadu

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2}.$$

3. K jaké funkci konverguje následující funkce? Zakreslete.

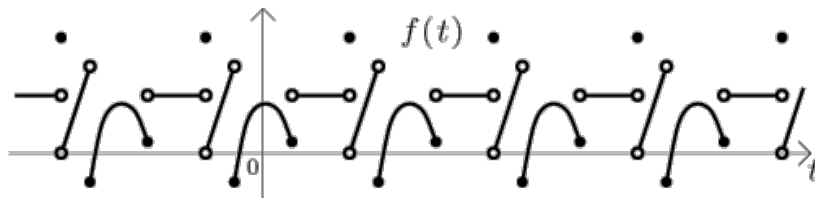


Figure 1: <http://math.feld.cvut.cz/mt/txt/3/txc3ea3f.htm>

