4. cvičení - Abel–Dirichlet, derivace řad

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Teorie

Věta 1 (Abel–Dirichlet)**.** Nechť $\{a_n(x)\}$ je posloupnost funkcí definovaných na intervalu J a nechť $\{b_n(x)\}$ je posloupnost funkcí na J taková, že

$$b_1(x) \geq b_2(x) \geq \dots 0.$$

Jestliže je některá z následujících podmínek splněna, pak

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x) \rightrightarrows \text{ na } J.$$

(A) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \rightrightarrows$ na J a b_1 je **omezená**;

(D) $b_n \rightrightarrows 0$ na J a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ má **omezené částečné součty**, tedy

$$\exists K > 0 \quad \forall m \in \mathbb{N} \quad \forall x \in J : |s_m(x)| = \left| \sum_{i=1}^{m} a_i(x) \right| < K.$$

Věta 2 (Abel–Dirichlet 2)**.** Nechť $\{a_n(x)\}, \{b_n(x)\}$ jsou posloupnosti funkcí definovaných na intervalu J. Nechť pro každé $x \in J$ je posloupnost čísel $\{b_n(x)\}$ **monotónní**. Jestliže je některá z následujících podmínek splněna, pak

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x) \rightrightarrows \text{ na } J.$$

(A) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \rightrightarrows$ na J a b_n je na J **stejně omezená**:

$$\exists K > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in J : \quad |b_n(x)| < K.$$

(D) $b_n \rightrightarrows 0$ na J a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ má **omezené částečné součty**, tedy

$$\exists K > 0 \quad \forall m \in \mathbb{N} \quad \forall x \in J : |s_m(x)| = \left| \sum_{i=1}^{m} a_i(x) \right| < K.$$

Věta 3 (Záměna sumy a derivace)**.** Nechť (a, b) je neprázdný interval a $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ je řada reálných funkcí splňující:

1. f_n má vlastní **derivaci** na (a, b),
2. existuje $x_0 \in (a, b)$ takové, že $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ **konverguje**,
3. řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n' \overset{loc}{\rightrightarrows}$ na (a, b).

Pak funkce $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ je dobře definovaná a **diferencovatelná**, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \overset{loc}{\rightrightarrows} F(x)$ na (a, b) a $\sum_{n=1}^{\infty} f_n' \overset{loc}{\rightrightarrows} F'(x)$ na (a, b).

Algoritmus pro AD

1. Zkusíme najít Dirichleta:
   - Je tam $(-1)^n$, $\sin t$, $\cos t$ krát nějaké $b_n(x)$? Dokážeme ověřit omezené částečné součty?
   - Jde $b_n(x)$ do 0? Stejnoměrně? A **monotónně**? $\to$ Dirichlet.
2. nebo Abela:
   - Je $b_n(x)$ složitější? Kdyby tam nějaký kousek nebyl, už bychom to uměli? $\to$ Abel.

Hinty

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b))$$

Fakta

$\sum_{n=1}^{\infty} \sin(nx)$ a $\sum_{n=1}^{\infty} \cos(nx)$ mají **stejně omezené částečné součty** na $[\delta, 2\pi - \delta]$ pro $\pi > \delta > 0$

Příklady

1. Vyšetřete stejnoměrnou a lokálně stejnoměrnou konvergenci řad funkcí.

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$ na $(-1, \infty)$

   (b)♡ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (1-x) x^n$ na $[0,1]$

   (c)❄ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^s}$, $s \in \mathbb{R}$

   (d)❀ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n} \arctan(nx)$ na $[0, 2\pi]$

   (e)✿ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin x \, \sin nx}{\sqrt{n+x}}$ na $(0, \infty)$

2. Rozhodněte, zda jsou následující funkce diferencovatelné na $(-1, \infty)$.

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$

   (b)❀ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x}{n+x}$

3. Spočtěte $f'(0)$ (vyjádřete jako řadu):

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin\left(1 + \frac{x}{n}\right)}{\sqrt{n}}$$

4. Ukažte, že funkce f má první derivaci spojitou na $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^3}$$

5. Spočtěte derivaci funkce (vyjádřete jako řadu):

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{2^n}$$

6. Dokažte, že pro Riemannovu zeta funkci

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

platí $\zeta \in C^{\infty}(1, \infty)$.

7. Zjistěte, kde je diferencovatelná funkce

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|}{n^2 + x^2}.$$

(1b) Dirichlet, $b_n = (1-x)x^n$
(1c) $s > 1$ Weierstrass; $s \leq 0$ NP; $0 < s \leq 1$ Dirichlet. BC podm.: $m = n_0$, $n = 2n_0$, $x = 1/2n_0$
(1d) Abel $b_n = \arctan(nx)$, BC podm. stejně jako 1c
(1e) Dirichlet $\sum_{i=1}^{M} \sin x \sin nx = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{M} \cos(n-1)x - \cos(n+1)x = 1/4(1 + \cos x - \cos(Nx) - \cos(N+1)x)$
(2b) součin 2 diferencovatelných fcí; jinak Věta + Dirichlet