



## 25. cvičení – Řetízkové pravidlo

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, [kuncova@karlin.mff.cuni.cz](mailto:kuncova@karlin.mff.cuni.cz)

### Teorie

**Věta 1** (Řetízkové pravidlo). Necht'  $G \subset \mathbb{R}^s$  a  $H \subset \mathbb{R}^r$  jsou otevřené množiny. Necht' funkce  $\varphi_1, \dots, \varphi_r \in C^1(G)$  a  $f \in C^1(H)$ . Definujme funkci  $F : G \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F(x) = f(\varphi_1(x), \dots, \varphi_r(x))$ . Pak  $F \in C^1(G)$ . Pro  $a \in G$  označme  $b = [\varphi_1(a), \dots, \varphi_r(a)]$ . Pak pro  $j = 1, \dots, s$  platí

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}(a) = \sum_{i=1}^r \frac{\partial f}{\partial y_i}(b) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(a).$$

**Poznámka 2** (Konkrétně). Je-li funkce  $f(x, y, z)$  spojitě diferencovatelná a  $x = \phi(u, v)$ ,  $y = \psi(u, v)$ ,  $z = \chi(u, v)$ , kde  $\phi, \psi, \chi$  jsou spojitě diferencovatelné funkce, pak

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u}, \quad \frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial v}$$



Figure 1: [http://mathinsight.org/media/image/image/chain\\_rule\\_geometric\\_objects.png](http://mathinsight.org/media/image/image/chain_rule_geometric_objects.png)

**Věta 3** (Postačující podmínka pro existenci totálního diferenciálu). Necht'  $a \in \mathbb{R}^n$ ,  $f$  je reálná funkce  $n$  proměnných definovaná na nějakém okolí  $a$ . Necht' navíc  $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$  jsou **spojité** v  $a$ . Pak existuje  $f'(a)$ .

**Věta 4** (Derivace ve směru). Necht'  $a \in \mathbb{R}^n$ ,  $f$  je reálná funkce  $n$  proměnných a existuje  $f'(a)$ . Pak pro každé  $v \in \mathbb{R}^n$  platí

$$D_v f(a) = f'(a)(v).$$

**Věta 5** (Derivace složeného zobrazení). Necht'  $n, k, m \in \mathbb{N}$ ,  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  a  $G : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$  jsou zobrazení. Necht'  $a \in \mathbb{R}^n$ ,  $b = F(a)$  a necht' existují  $F'(a)$  a  $G'(b)$ . Pak existuje  $(G \circ F)'(a)$  a platí

$$(G \circ F)'(a) = G'(b) \circ F'(a)$$

$((G \circ F)'(a))$  je reprezentována součinem matic, které reprezentují zobrazení  $G'(b)$  a  $F'(a)$ .

**Notation 6.** Necht'  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  je funkce, necht'  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  a  $a \in \mathbb{R}^n$ . Parciální derivaci funkce  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  podle  $j$ -té proměnné v bodě  $a$  značíme

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right), i \neq j, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right), i = j,$$

### Věta 7. O zaměnitelnosti parciálních derivací

Necht'  $f$  je reálná funkce  $n$  proměnných,  $a \in \mathbb{R}^n$  a  $1 \leq i, j \leq n$ . Necht' platí, že

(i) funkce  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$  je spojitá v bodě  $a$ ,

(ii) funkce  $\frac{\partial f}{\partial x_j}$  je definovaná na nějakém okolí bodu  $a$ .

Potom existují a jsou si rovny

$$\frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_j \partial x_i}.$$

## Příklady

Předpokládejme, že jsou splněny všechny nutné předpoklady (speciálně funkce jsou diferencovatelné a mají záměnné smíšené derivace).

- Vypočtete derivace složených funkcí
  - $z = u\sqrt{1+v^2}$ , kde  $u = e^{2x}$  a  $v = e^{-x}$
  - $z = uv^2w^3$ , kde  $u = \sin x$ ,  $v = -\cos x$  a  $w = e^x$
  - $z = \sin u \cos v$ , kde  $u = (x-y)^2$  a  $v = x^2 - y^2$
  - $w = yz^2 - x^3$ , kde  $x = e^{r-t}$ ,  $y = \ln(r+2s+3t)$  a  $z = \sqrt{rs+t}$
- ✿ Spočtete parciální derivace  $g(x, y) = f(x^2 + y^2)$ .
- Nechť  $f(x, y) = x^2 + 3y^2$ . Určete derivace  $f$  vzhledem k polárním souřadnicím.  
Polární souřadnice:  $x = r \cos \alpha$ ,  $y = r \sin \alpha$ .
- Nechť  $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$ . Určete derivace  $f$  vzhledem k polárním souřadnicím.
- ♡ Ukažte, že funkce  $F(x, y, z) = \frac{xy}{z} \ln x + xf\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)$  vyhovuje vztahu  $x \frac{\partial F}{\partial x} + y \frac{\partial F}{\partial y} + z \frac{\partial F}{\partial z} = F + \frac{xy}{z}$ .
- ✱ Nechť  $g(x, y) = f(x+y, x-y)$ , spočtete  $\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}$  v bodě  $(a, b)$ .
- Ukažte, že funkce  $F(x, y) = xf(x+y) + yg(x+y)$  vyhovuje rovnici  $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0$ .
- Výraz  $x \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + y \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$  přetransformujte pro funkci  $F(u, v) = f(x, y)$ , kde  $u = y$  a  $v = y/x$ .

## Zkouškové příklady

- ☆ Nechť  $F = (F_1, F_2) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  je zobrazení definované předpisem

$$F(x, y, z) = ((x+1)^2(y+1)(z+2), \sin x \cos(2y+z)).$$

Zobrazení  $G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  má v bodě  $[2, 0]$  derivaci representovanou maticí

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Dokažte, že v bodě  $[0, 0, 0]$  existuje derivace zobrazení  $G \circ F$  a spočtete její reprezentující matici.
  - Spočtete derivaci funkce  $F_1$  v bodě  $[0, 0, 0]$  podle vektoru  $(1, 2, 0)$ .
- Nechť  $F = (F_1, F_2, F_3, F_4) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$  je zobrazení definované předpisem

$$F(x, y) = \left( \arctan(x+2y), x+y, (x^2+y^2) \frac{|x|}{1+|y|}, ye^x \right).$$

- Ukažte, že v bodě  $(-1, 1)$  existuje derivace funkce  $F$  a spočtete její reprezentující matici.
- Spočtete  $\frac{\partial F_3}{\partial x}(0, 0)$ , pokud existuje.

(2) Uvažujeme funkci  $f(n, y) = x^2 + y^2$ .  
 (5) Uvažujeme funkci  $f(n, x, y, z) = (z, y, x, a)$  a  $\frac{x}{y} = (z, y, x, a)$ .  
 (6) 2. derivace se budou počítat lépe, když si označíme funkce  $h(n, y) = \frac{n \partial}{\partial y} = (a, n) f$  a  $\frac{\partial \partial}{\partial y} = (a, n) f$ .  
 (9) Nezapomínejte odůvodňovat, proč všechny příslušné derivace existují.