



24. cvičení – Totální diferenciál

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Příklady

1. Určete definiční obor, parciální derivace a totální diferenciál následujících funkcí

(a) $x^2 - 2xy - 3y^2$

Řešení:

Příklad i s řešením máme z: https://homel.vsb.cz/~kre40/esfmat2/kapitoly/kapitola_5_2.pdf

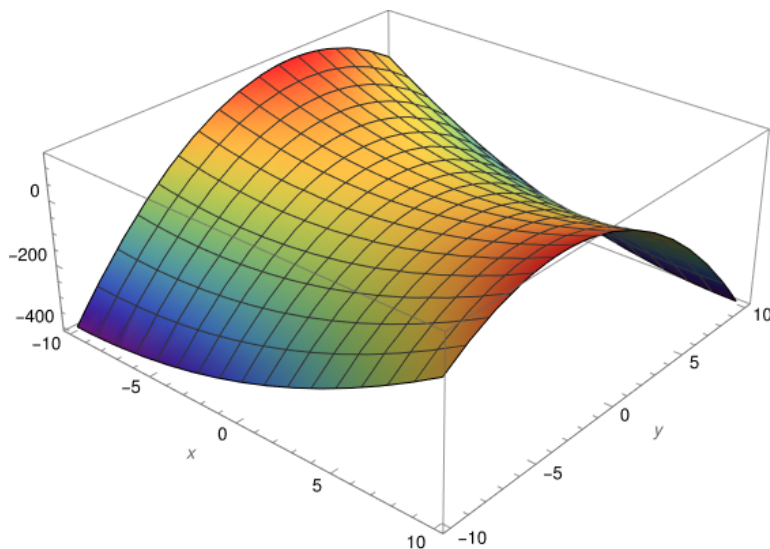
Máme $D_f = \mathbb{R}^2$.

Parciální derivace:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= 2x - 2y, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= -2x - 6y.\end{aligned}$$

Obě parciální derivace jsou definované a spojité na celém $\mathbb{R}^2$. Tedy totální diferenciál existuje a je tvaru

$$f'(a)(h) = (2a_1 - 2a_2)h_1 + (-2a_1 - 6a_2)h_2.$$



(b) $\arctan \frac{x-y}{x+y}$ **Řešení:**

Příklad i s řešením máme z: https://homel.vsb.cz/~kre40/esfmat2/kapitoly/kapitola_5_2.pdf

Máme $D_f = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x \neq -y\}$.

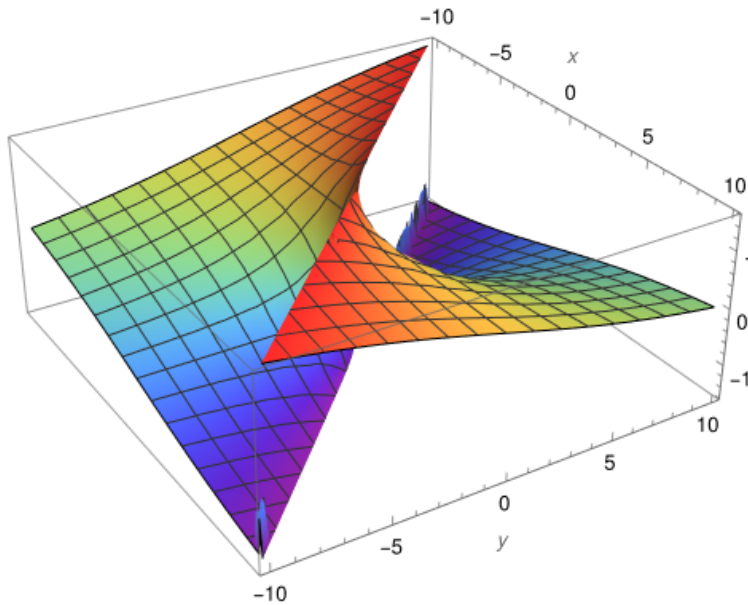
Parciální derivace na D_f :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{1 + \left(\frac{x-y}{x+y}\right)^2} \cdot \frac{1(x+y) - 1(x-y)}{(x+y)^2} = \frac{y}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{1 + \left(\frac{x-y}{x+y}\right)^2} \cdot \frac{-1(x+y) - 1(x-y)}{(x+y)^2} = \frac{-x}{x^2 + y^2}$$

Obě parciální derivace jsou definované a spojité na celém D_f . Tedy totální diferenciál existuje na D_f a je tvaru

$$f'(a)(h) = \frac{a_2}{a_1^2 + a_2^2} h_1 + \frac{-a_1}{a_1^2 + a_2^2} h_2.$$



(c) $xy \log(x+y)$

Řešení: Příklad i s řešením máme z: https://homel.vsb.cz/~kre40/esfmat2/kapitoly/kapitola_5_2.pdf

Máme $D_f = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x+y > 0\}$.

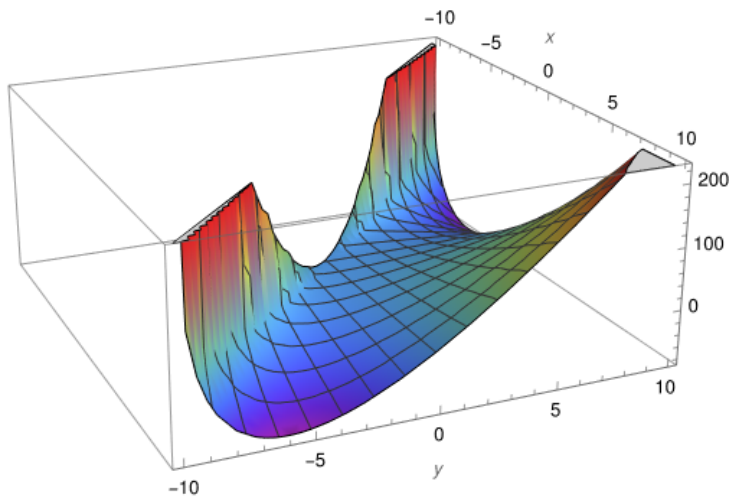
Parciální derivace na D_f :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y \log(x+y) + \frac{xy}{x+y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x \log(x+y) + \frac{xy}{x+y}$$

Obě parciální derivace jsou definované a spojité na celém D_f . Tedy totální diferenciál existuje a je tvaru

$$f'(a)(h) = \left(a_2 \log(a_1 + a_2) + \frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2} \right) h_1 + \left(a_1 \log(a_1 + a_2) + \frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2} \right) h_2.$$



2. Určete parciální derivace a tot. diferenciál v bodě $(0, 0)$:

(a) $|y| \sin x$

Stručnější řešení: 1. $D_f = \mathbb{R}^2$ (absolutní hodnota ani funkce sinus nedávají žádné podmínky).

2. Parciální derivaci podle x v bodě $(0, 0)$ lze určit přímým výpočtem:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = (|y| \cos x)|_{(0,0)} = |0| \cos 0 = 0.$$

Parciální derivaci podle y v bodě $(0, 0)$ kvůli absolutní hodnotě u y určíme raději z definice parciální derivace:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, 0+h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|0+h| \sin 0 - |0| \sin 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0.$$

3. Díky existenci parciálních derivací v bodě $(0, 0)$ máme jediného kandidáta na totální diferenciál

$$df(0, 0) \stackrel{?}{=} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0), \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) \right) = (0, 0).$$

Nevíme, zda jsou parciální derivace v bodě $(0, 0)$ spojité, proto ověříme (nebo vyvrátíme), že o totální diferenciál skutečně jde pomocí jeho definice. Chceme tedy ukázat (nebo vyvrátit), že

$$\lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0,0)} \frac{f(0+h_1, 0+h_2) - f(0, 0) - \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0), \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) \right) \cdot (h_1, h_2)^T}{\|(h_1, h_2)\|} = 0.$$

Po dosazení na levou stranu a rozšířením h_1 dostaneme

$$\lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0,0)} \frac{|h_2| \sin h_1}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = \lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0,0)} \underbrace{\frac{\sin h_1}{h_1}}_{\rightarrow 1} \cdot \frac{h_1 |h_2|}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = \lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0,0)} \frac{h_1 |h_2|}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}$$

Protože podle AG-nerovnosti platí odhady:

$$0 \leq \frac{|h_2 h_1|}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \leq \frac{\frac{h_1^2 + h_2^2}{2}}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = \frac{1}{2} \sqrt{h_1^2 + h_2^2} \xrightarrow{(h_1, h_2) \rightarrow (0,0)} 0,$$

podle věty o dvou políciátech vyplývá

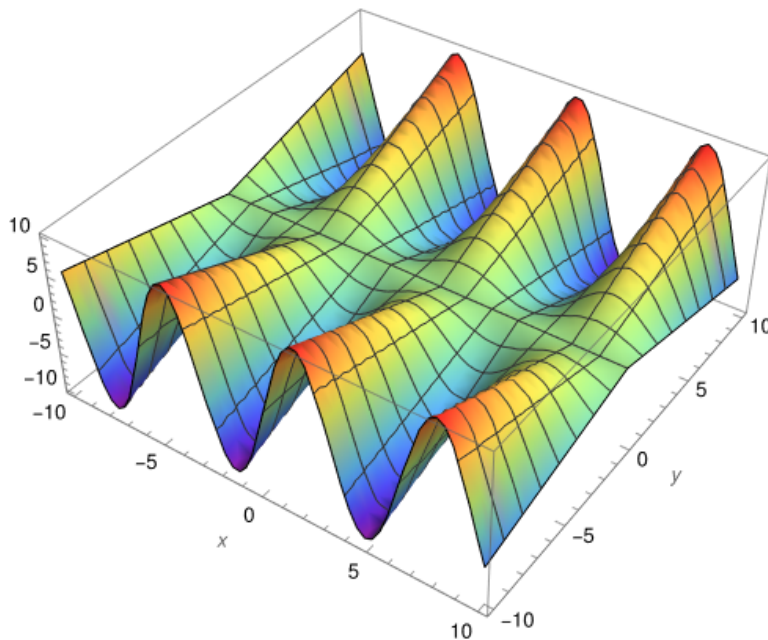
$$\lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0,0)} \frac{|h_2 h_1|}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = 1 \cdot 0 = 0.$$

Protože i ve více proměnných platí, že $\lim f = 0$, právě když $\lim |f| = 0$, je tedy také

$$\lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0,0)} \frac{|h_2| |h_1|}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = 1 \cdot 0 = 0,$$

a tedy funkce f má v bodě $(0,0)$ totální diferenciál

$$df(0,0) = (0,0).$$



Podrobnější řešení: 1. *Určíme definiční obor.* Absolutní hodnota ani funkce sinus nám nedávají žádné podmínky, definičním oborem je tedy celé $\mathbb{R}^2$.

$$D_f = \mathbb{R}^2.$$

2. *Spočteme parciální derivace.* Pro parciální derivaci $\frac{\partial f}{\partial x}$ na celém $\mathbb{R}^2$ platí:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (|y| \sin x) = |y| \frac{\partial}{\partial x} (\sin x) = |y| \cos x,$$

speciálně tedy $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = |0| \cos 0 = 0$.

Parciální derivaci $\frac{\partial f}{\partial y}$ na celém $\mathbb{R}^2$ kvůli absolutní hodnotě takto jednoduše spočítat nelze. Proto je výhodnější rovnou počítat z definice v bodě $(0,0)$.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0,0+h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|0+h| \sin 0 - |0| \sin 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0.$$

3. Určíme, zda funkce má či nemá totální diferenciál. Obě parciální derivace podle předchozího kroku existují. Jediným kandidátem na totální diferenciál je tedy (lineární zobrazení určené maticí 2×1)

$$df(0,0) \stackrel{?}{=} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \right) = (0,0).$$

Protože nevíme, zda je $\frac{\partial f}{\partial y}$ v bodě $(0,0)$ spojitá, zkusíme ověřit, zda se jedná o totální diferenciál funkce f v bodě $(0,0)$ pomocí definice totálního diferenciálu. Chceme tedy ověřit nebo vyvrátit, že

$$\lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0,0)} \frac{f(0+h_1, 0+h_2) - f(0,0) - \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \right) \cdot (h_1, h_2)^T}{\|(h_1, h_2)\|} = 0.$$

Po dosazení do limity postupně dostaneme:

$$\begin{aligned} \lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0,0)} \frac{f(0+h_1, 0+h_2) - f(0,0) - \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \right) \cdot (h_1, h_2)^T}{\|(h_1, h_2)\|} &= \\ &= \lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0,0)} \frac{|h_2| \sin h_1 - 0 - (0,0) \cdot (h_1, h_2)^T}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = \\ &= \lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0,0)} \frac{|h_2| \sin h_1}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}. \end{aligned}$$

Nyní se můžeme zbavit sinu rozšířením h_1 , neboť $\lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin h_1}{h_1} = 1$. Podle věty o aritmetice limit

$$\begin{aligned} \lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0,0)} \frac{|h_2| \sin h_1}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} &= \\ &= \lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin h_1}{h_1} \cdot \lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0,0)} \frac{h_1 |h_2|}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = \\ &= \lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0,0)} \frac{h_1 |h_2|}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}. \end{aligned}$$

Chceme ukázat, že limita výše je rovna nule. K tomu stačí ukázat, že i v absolutní hodnotě je limita rovna nule, tedy že

$$\lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0,0)} \left| \frac{h_1 |h_2|}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \right| = \lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0,0)} \frac{|h_1 h_2|}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \stackrel{?}{=} 0.$$

Absolutní hodnotou jsme si zjednodušili práci, protože nyní můžeme použít odhad plynoucí z AG-nerovnosti, která platí pro nezáporná čísla:

$$|h_1 h_2| \leq \frac{h_1^2 + h_2^2}{2},$$

a tudíž

$$0 \leq \frac{|h_1 h_2|}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \leq \frac{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}{2} \xrightarrow{(h_1, h_2) \rightarrow (0,0)} 0.$$

Podle věty o dvou políciátech pro limitu funkce více proměnných je tedy

$$\lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0,0)} \frac{|h_1 h_2|}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = 0,$$

tedy podle předchozího postupu také

$$\lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0,0)} \frac{f(0 + h_1, 0 + h_2) - f(0, 0) - \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0), \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)\right) \cdot (h_1, h_2)^T}{\|(h_1, h_2)\|} = 0,$$

což podle definice totálního diferenciálu znamená, že $df(0, 0) = (0, 0)$. $\square$

(b) $\cos \sqrt[3]{xy}$

Řešení:

1. $D_f = \mathbb{R}^2$ (funkce kosinus ani třetí odmocnina nedávají žádné podmínky).
2. Parciální derivace v bodě $(0, 0)$ přímým výpočtem určit nelze, neboť

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (\cos \sqrt[3]{xy}) = -\sin(\sqrt[3]{xy}) \cdot \frac{1}{3\sqrt[3]{(xy)^2}} \cdot y,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (\cos \sqrt[3]{xy}) = -\sin(\sqrt[3]{xy}) \cdot \frac{1}{3\sqrt[3]{(xy)^2}} \cdot x,$$

kteréžto výrazy nejsou v bodě $(0, 0)$ definované. Budeme tedy počítat z definice parciálních derivací.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0 + h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos \sqrt[3]{(0 + h) \cdot 0} - \cos \sqrt[3]{0 \cdot 0}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0. \end{aligned}$$

Obdobně

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, 0 + h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos \sqrt[3]{0 \cdot (0 + h)} - \cos \sqrt[3]{0 \cdot 0}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0. \end{aligned}$$

3. Díky existenci parciálních derivací máme jediného kandidáta na totální diferenciál, a tedy

$$df(0, 0) \stackrel{?}{=} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0), \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)\right) = (0, 0).$$

Ověříme to (nebo vyvrátíme) pomocí definice totálního diferenciálu. Ptáme se tedy, zda

$$\lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0,0)} \frac{f(0 + h_1, 0 + h_2) - f(0, 0) - \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0), \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)\right) \cdot (h_1, h_2)^T}{\|(h_1, h_2)\|} \stackrel{?}{=} 0.$$

Po dosazení do limity postupně dostaneme:

$$\lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0,0)} \frac{\cos \sqrt[3]{(0 + h_1)(0 + h_2)} - 1 - (0, 0) \cdot (h_1, h_2)^T}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = \lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0,0)} \frac{\cos \sqrt[3]{(h_1 h_2)} - 1}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}.$$

Pozor. Nyní si uvědomme, že pokud jdeme do nuly po přímkách $h_1 = 0$ nebo $h_2 = 0$, potom čitatel je nulový a limita rovna nule. V dalším tedy můžeme počítat limitu vzhledem k definičnímu oboru bez těchto os x a y , tedy vzhledem k množině

$$M := \mathbb{R}^2 \setminus \left\{ \{(-\infty, +\infty) \times \{0\}\} \cup \{\{0\} \times (-\infty, +\infty)\} \right\}.$$

Pokud i limita vzhledem k množině M vyjde nula, pak i původní limita počítaná vzhledem k celému definičnímu oboru bude rovna nule.

Důvodem této pasáže je, že pro odstranění kosinu budeme potřebovat rozšířit, a na osách by toto rozšíření selhalo.

Počítáme tedy nyní

$$\lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0,0)_{(h_1, h_2) \in M}} \frac{\cos \sqrt[3]{h_1 h_2} - 1}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} =$$

po rozšíření dostaneme

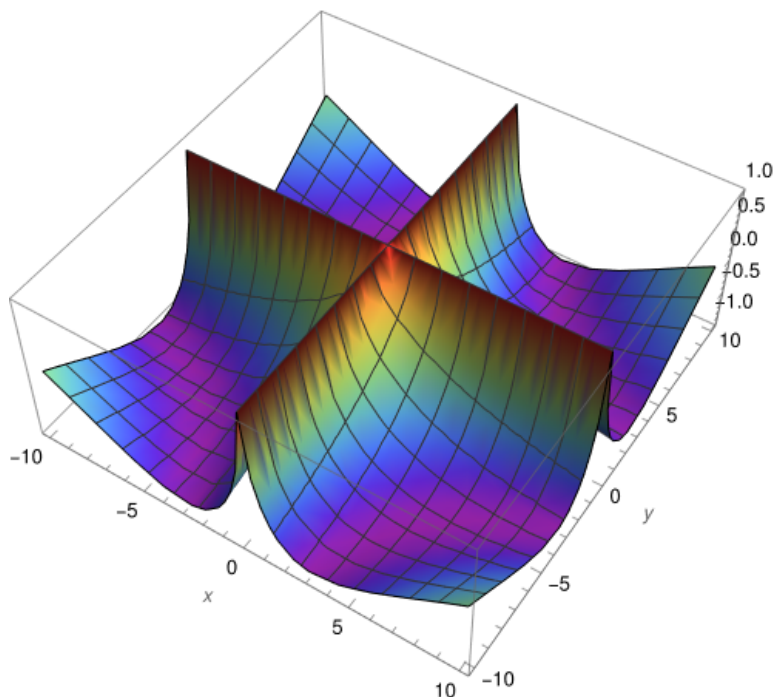
$$= \lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0,0)_{(h_1, h_2) \in M}} \underbrace{\frac{\cos \sqrt[3]{h_1 h_2} - 1}{\sqrt[3]{(h_1 h_2)^2}}}_{\rightarrow -1/2} \cdot \frac{\sqrt[3]{(h_1 h_2)^2}}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}.$$

První limita je rovna minus jedné polovině podle jednorozměrné limity $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\cos z - 1}{z^2} = -\frac{1}{2}$ a věty o limitě složené funkce pro limity více proměnných, varianty (P), neboť existuje prstencové okolí P bodu $(0,0)$, pro které na $P \cap M$ je $0 < (h_1 h_2)^2 < 2\pi$, a tedy $\cos \sqrt[3]{h_1 h_2}^2 \neq 1$. **Zde je právě důležité z množiny M vyloučit osy x a y .**

Podle AG-nerovnosti je pak $\sqrt[3]{(h_1 h_2)^2} \leq (h_1^2 + h_2^2)^{2/3} / \sqrt[3]{4}$, a tedy platí odhady

$$0 \leq \frac{\sqrt[3]{(h_1 h_2)^2}}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{4}} (h_1^2 + h_2^2)^{\frac{2}{3} - \frac{1}{2}} \xrightarrow{(h_1, h_2) \rightarrow (0,0)} 0.$$

Podle věty o dvou polícajtech je tedy hledaná limita skutečně rovna nule (vzhledem k M ; předtím jsme totéž ukázali i vůči ose x a ose y). Tedy to platí i vůči celému D_f , a tudíž funkce f má v bodě $(0,0)$ totální diferenciál $df(0,0) = (0,0)$. $\square$



(c) $\sqrt{|x|^3 + |y|^3}$

Řešení:

1. $D_f = \mathbb{R}^2$ (třetí odmocnina ani absolutní hodnota nedávají žádné podmínky).
2. Parciální derivace v bodě $(0, 0)$ spočteme z definice. Počítáme-li naráz jednostranné limity zleva i zprava, dostáváme:

$$\lim_{h \rightarrow 0^\pm} \frac{\sqrt{|0 + h|^3 + |0|^3}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^\pm} \frac{|h|^{3/2}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^\pm} \frac{|h|}{h} \cdot \lim_{h \rightarrow 0^\pm} |h|^{1/2} = \pm 1 \cdot 0 = 0.$$

Obě jednostranné limity jsou si rovny, existuje tedy oboustranná. Z definice existuje tedy i parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$, neboť

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{|0 + h|^3 + |0|^3}}{h} = 0.$$

Analogicky pro $\frac{\partial f}{\partial y}$:

$$\lim_{h \rightarrow 0^\pm} \frac{\sqrt{|0|^3 + |0 + h|^3}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^\pm} \frac{|h|^{3/2}}{h} = 0.$$

Opět, obě jednostranné limity jsou si rovny, existuje tedy oboustranná. Z definice existuje tedy i parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ a je $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$.

3. Díky existenci parciálních derivací máme jediného kandidáta na totální diferenciál, a tedy

$$df(0, 0) \stackrel{?}{=} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0), \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) \right) = (0, 0).$$

Ověříme to (nebo vyvrátíme) pomocí definice totálního diferenciálu. Ptáme se tedy, zda

$$\lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0,0)} \frac{f(0+h_1, 0+h_2) - f(0,0) - \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right) \cdot (h_1, h_2)^T}{\|(h_1, h_2)\|} \stackrel{?}{=} 0.$$

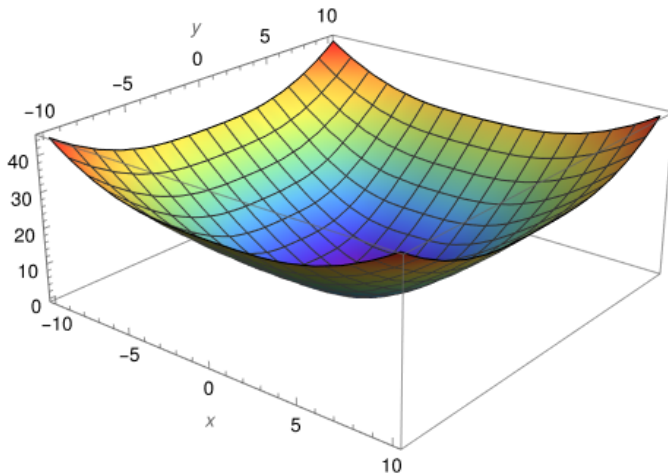
Po dosazení do limity postupně dostaneme:

$$\lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0,0)} \frac{\sqrt{|0+h_1|^3 + |0+h_2|^3} - 0 - (0,0) \cdot (h_1, h_2)^T}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = \lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0,0)} \frac{\sqrt{|h_1|^3 + |h_2|^3}}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}.$$

Nyní platí odhady:

$$0 \leq \frac{\sqrt{|h_1|^3 + |h_2|^3}}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \leq \frac{\sqrt{(|h_1| + |h_2|)(|h_1|^2 + |h_2|^2)}}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = \sqrt{|h_1| + |h_2|} \xrightarrow{(h_1, h_2) \rightarrow (0,0)} 0.$$

Podle věty o dvou políčkách je tedy hledaná limita rovne nule, a tudíž funkce f má v bodě $(0,0)$ totální diferenciál $df(0,0) = (0,0)$. $\square$



(d) $\sqrt[3]{xy}$

Řešení:

1. $D_f = \mathbb{R}^2$.
2. Spočteme parciální derivace v bodě $(0,0)$. Budeme počítat z definice.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h, 0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{(0+h)0} - \sqrt[3]{0 \cdot 0}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0,$$

Analogicky

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.$$

3. Díky existenci parciálních derivací máme jediného kandidáta na totální diferenciál, a tedy

$$df(0,0) \stackrel{?}{=} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right) = (0,0).$$

Ověříme to (nebo vyvrátíme) pomocí definice totálního diferenciálu. Ptáme se tedy, zda

$$\lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0,0)} \frac{f(0 + h_1, 0 + h_2) - f(0,0) - \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right) \cdot (h_1, h_2)^T}{\|(h_1, h_2)\|} \stackrel{?}{=} 0.$$

Po dosazení do limity postupně dostaneme:

$$\lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0,0)} \frac{\sqrt[3]{h_1 h_2} - 0 - (0,0) \cdot (h_1, h_2)^T}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = \lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0,0)} \frac{\sqrt[3]{h_1 h_2}}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}$$

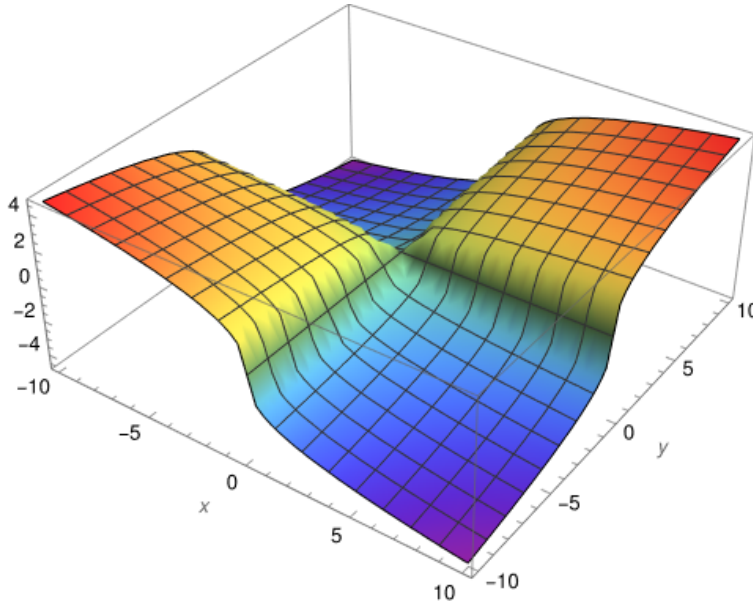
Tato limita ovšem neexistuje. Pro přímkou $h_1 = 0$ máme

$$\lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0,0)} \frac{\sqrt[3]{0 \cdot h_2}}{\sqrt{0^2 + h_2^2}} = 0,$$

zatímco pro přímkou $h_1 = h_2$

$$\lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0,0)} \frac{\sqrt[3]{h_2 \cdot h_2}}{\sqrt{h_2^2 + h_2^2}} = \lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0,0)} \frac{1}{\sqrt{2} \sqrt[3]{|h_2|}} = \infty.$$

Závěr: Totální diferenciál neexistuje.



$$(e) \ f(x) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Řešení:

1. $D_f = \mathbb{R}^2$ (zlomek v sinu dává podmínku $x^2 + y^2 \neq 0$, první výraz je tedy korektně definován všude kromě počátku; v počátku je však funkce dodefinována druhým řádkem).

Vsuvka: Není nutné ověřovat spojitost f v bodě $(0,0)$. Přesto se může hodit se nad tím zamyslet, neboť funkce, která není v bodě spojitá, nemůže mít v tomto bodě totální diferenciál.

Funkce f nicméně v bodě $(0,0)$ spojitá je. Plyne to z věty o dvou polícajtech a jednoduchého odhadu

$$-(x^2 + y^2) \leq f(x, y) \leq (x^2 + y^2),$$

přičemž levá i pravá strana konvergují do nuly pro $(x, y) \rightarrow (0, 0)$.

2. Spočteme parciální derivace v bodě $(0,0)$. Protože bod $(0,0)$ je od pohledu problematický, budeme počítat z definice.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(h^2 + 0^2) \sin \frac{1}{h^2+0^2} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h \sin \frac{1}{h^2} = 0,$$

podle věty o omezené krát nulové posloupnosti. Obdobně

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0,0+h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(0^2 + h^2) \sin \frac{1}{0^2+h^2} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h \sin \frac{1}{h^2} = 0.$$

3. Díky existenci parciálních derivací máme jediného kandidáta na totální diferenciál, a tedy

$$df(0,0) \stackrel{?}{=} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \right) = (0,0).$$

Ověříme to (nebo vyvrátíme) pomocí definice totálního diferenciálu. Ptáme se tedy, zda

$$\lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0,0)} \frac{f(0+h_1, 0+h_2) - f(0,0) - \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \right) \cdot (h_1, h_2)^T}{\|(h_1, h_2)\|} \stackrel{?}{=} 0.$$

Po dosazení do limity postupně dostaneme:

$$\begin{aligned} & \lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0,0)} \frac{(h_1^2 + h_2^2) \sin \frac{1}{h_1^2 + h_2^2} - 0 - (0,0) \cdot (h_1, h_2)^T}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = \\ & = \lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0,0)} \sqrt{h_1^2 + h_2^2} \cdot \sin \frac{1}{h_1^2 + h_2^2} = 0 \end{aligned}$$

opět podle věty o limitě omezené krát nulové posloupnosti (ovšem tentokrát pro funkce více proměnných). Tudíž funkce f má v bodě $(0,0)$ totální diferenciál $df(0,0) = (0,0)$. $\square$

Dodatek nepotřebný pro řešení úlohy: Funkce f má v bodě $(0,0)$ totální diferenciál, přestože parciální derivace jsou v tomto bodě nespojitě.

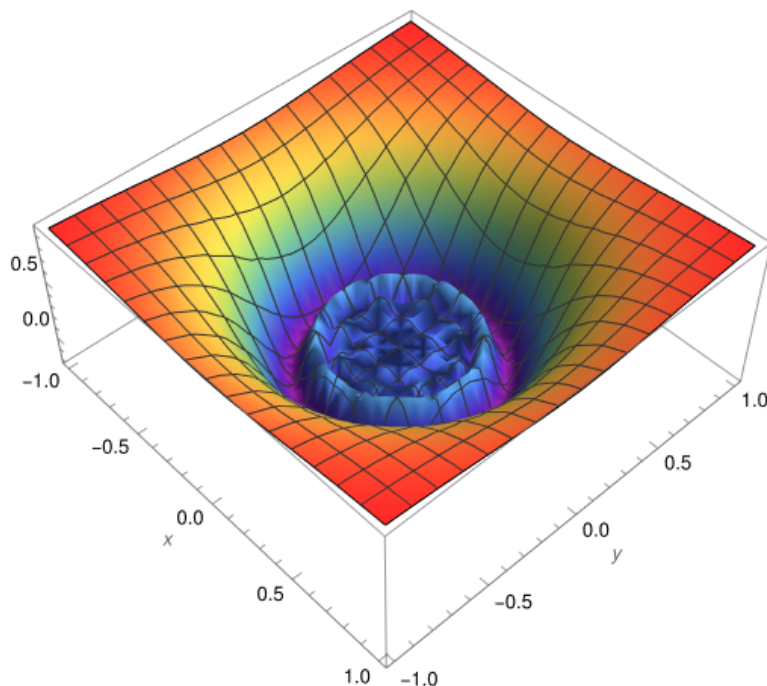
Máme totiž např., že

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x \sin \frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{x}{x^2 + y^2} \cos \frac{1}{x^2 + y^2} \quad (x,y) \neq (0,0).$$

Aby byla parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x}$ v bodě $(0,0)$ spojitá, muselo by platit, že (dvojná) limita $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0$. To ale není pravda, tato limita totiž neexistuje. Jděme např. do bodu $(0,0)$ po přímce $y = x$, tj. počítejme limitu

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(h,h) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{h} = \\ & = \lim_{h \rightarrow 0} \left(2 \sin \frac{1}{2h^2} - \frac{1}{h} \cos \frac{1}{2h^2} \right). \end{aligned}$$

Limita napravo zjevně neexistuje, $\frac{\partial f}{\partial x}$ tedy nemůže být spojitá v bodě $(0,0)$. Dokázat lze například z Heineho věty. Pokud volíme například posloupnost $h_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}$, potom $\cos \frac{1}{h_n^2} = \cos(2\pi n) = 1$, $\sin \frac{1}{2h_n^2} = \sin(\pi n) = 0$, a tedy $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial f}{\partial x}(h_n, h_n) = -\infty$. Naopak, volíme-li $h_n = \frac{1}{\sqrt{\pi + 2\pi n}}$, pak $\cos \frac{1}{h_n^2} = \cos(\pi + 2\pi n) = -1$, $\sin \frac{1}{2h_n^2} = \sin(\pi/2 + \pi n) = 0$, a tedy $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial f}{\partial x}(h_n, h_n) = +\infty$.



3. Dodefinujte funkci $f(x, y) = \frac{x^3y}{x^2+y^2}$ tak, aby měla totální diferenciál ve všech bodech a spočtěte ho.

Řešení:

Příklad i s řešením máme z: Metody řešení vybraných úloh z matematické analýzy, Holický, Kalenda

- Funkce je definována na $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Musíme ji tedy dodefinovat v počátku. Aby měla totální diferenciál, musí být dodefinována spojitě. Uvažujme např. limitu po přímce $y = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = \frac{0}{x^2 + 0} = 0.$$

Kandidátem na dodefinování je tedy pouze 0.

Dále pracujeme s funkcí

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3y}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

(Pozn.: Zatím nevíme, zda je takto dodefinovaná funkce opravdu spojitá,)

- V bodech $(x, y) \neq (0, 0)$ spočteme parciální derivace.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{3x^2y(x^2 + y^2) - x^3y \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^2y(x^2 + 3y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{x^3(x^2 + y^2) - x^3y \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^3(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \end{aligned}$$

Protože obě parciální derivace jsou spojitě na množině $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, tak tam funkce má totální diferenciál tvaru

$$f'(x, y)(h_1, h_2) = \frac{x^2y(x^2 + 3y^2)}{(x^2 + y^2)^2} h_1 + \frac{x^3(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} h_2.$$

- Parciální derivace v bodě $(0, 0)$ spočteme z definice.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0 + t, 0) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{t^3 \cdot 0}{t^2} - 0}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0}{t} = 0.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0, 0 + t) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{0^3 \cdot t}{t^2} - 0}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0}{t} = 0.$$

- Kandidátem na totální diferenciál v bodě $(0, 0)$ je tedy zobrazení

$$f(0, 0)(h_1, h_2) = 0h_1 + 0h_2.$$

Ověříme z definice, tedy se ptáme, zda:

$$\lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(0 + h_1, 0 + h_2) - f(0, 0) - \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0), \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)\right) \cdot (h_1, h_2)^T}{\|(h_1, h_2)\|} = 0.$$

Konkrétně tedy

$$\lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0, 0)} \frac{\frac{h_1^3 h_2}{h_1^2 + h_2^2} - 0 - 0}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = \lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0, 0)} \frac{h_1^3 h_2}{(h_1^2 + h_2^2) \sqrt{h_1^2 + h_2^2}}$$

Použijeme odhad

$$2|h_1 h_2| \leq h_1^2 + h_2^2$$

Pak

$$\left| \frac{h_1^3 h_2}{(h_1^2 + h_2^2) \sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \right| = \left| \frac{h_1^2}{(h_1^2 + h_2^2)} \right| \cdot \left| \frac{h_1 h_2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \right| \leq \left| \frac{h_1^2}{h_1^2} \right| \cdot \left| \frac{1}{2} \frac{h_1^2 + h_2^2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \right| = \frac{1}{2} \sqrt{h_1^2 + h_2^2}$$

Protože (ze spojitosti)

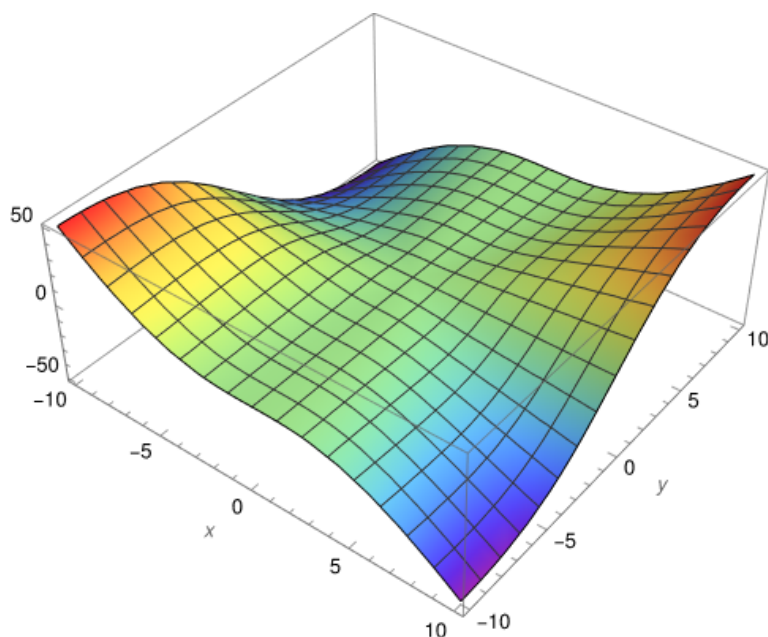
$$\lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0, 0)} \frac{1}{2} \sqrt{h_1^2 + h_2^2} = 0,$$

tak i (ze 2 policajtů)

$$\left| \frac{h_1^3 h_2}{(h_1^2 + h_2^2) \sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \right| = 0.$$

Tedy jsme ověřili, že totální diferenciál v počátku opravdu je tvaru

$$f(0, 0)(h_1, h_2) = 0h_1 + 0h_2.$$



4. Dodefinujte funkci $f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ tak, aby měla totální diferenciál ve všech bodech a spočtěte ho.

Řešení:

Příklad i s řešením máme z: https://lide.uhk.cz/prf/ucitel/lipovji1/teaching/dif_pocet_vice_prom.pdf

- Funkce je definována na $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Musíme ji tedy dodefinovat v počátku. Aby měla totální diferenciál, musí být dodefinována spojitě. Uvažujme např. limitu po přímce $y = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = \frac{0}{\sqrt{x^2 + 0}} = 0.$$

Kandidátem na dodefinování je tedy pouze 0.

Dále pracujeme s funkcí

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- V bodech $(x, y) \neq (0, 0)$ spočteme parciální derivace.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{y\sqrt{x^2 + y^2} - xy \frac{1}{2} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + y^2}}}{(\sqrt{x^2 + y^2})^2} = \frac{y^3}{(\sqrt{x^2 + y^2})^3} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{x^3}{(\sqrt{x^2 + y^2})^3} \end{aligned}$$

Protože obě parciální derivace jsou spojitě na množině $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, tak tam funkce má totální diferenciál tvaru

$$f'(x, y)(h_1, h_2) = \frac{y^3}{(\sqrt{x^2 + y^2})^3} h_1 + \frac{x^3}{(\sqrt{x^2 + y^2})^3} h_2.$$

- Parciální derivace v bodě $(0, 0)$ spočteme z definice.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0 + t, 0) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{t \cdot 0}{\sqrt{t^2 + 0}} - 0}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0}{t|t|} = 0.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0, 0 + t) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{0 \cdot t}{\sqrt{0 + t^2}} - 0}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0}{t|t|} = 0.$$

- Kandidátem na totální diferenciál v bodě $(0, 0)$ je tedy zobrazení

$$f(0, 0)(h_1, h_2) = 0h_1 + 0h_2.$$

Ověříme z definice, tedy se ptáme, zda:

$$\lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(0 + h_1, 0 + h_2) - f(0, 0) - \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0), \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)\right) \cdot (h_1, h_2)^T}{\|(h_1, h_2)\|} = 0.$$

Konkrétně tedy

$$\lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0, 0)} \frac{\frac{h_1 h_2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} - 0 - 0}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = \lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0, 0)} \frac{h_1 h_2}{h_1^2 + h_2^2}$$

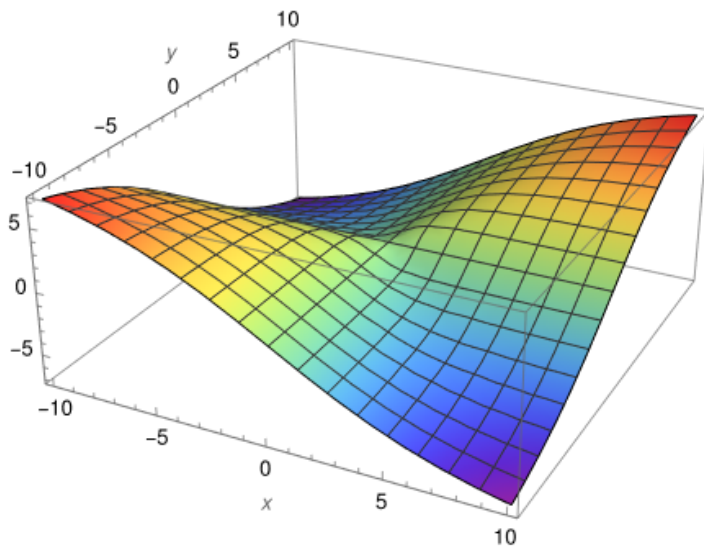
Tato limita neexistuje, protože pro přímku $h_2 = h_1$ dostáváme

$$\lim_{h_1 \rightarrow 0} \frac{h_1^2}{h_1^2 + h_1^2} = \frac{1}{2}$$

ale pro $h_2 = 0$ je

$$\lim_{h_1 \rightarrow 0} \frac{0}{h_1^2} = 0.$$

Tedy jsme ověřili, že totální diferenciál v počátku neexistuje.



5. Lze dodefinovat funkci $f(x, y) = \frac{x+y}{x^2+y^2} \ln(1+xy)$ na nějakém okolí počátku tak, aby v něm měla totální diferenciál?

Řešení: Příklad i s řešením máme z: Metody řešení vybraných úloh z matematické analýzy, Holický, Kalenda

- Funkce xy je spojitá na $\mathbb{R}^2$ a v počátku má hodnotu 0, tedy existuje takové prstencové δ -okolí počátku, že $xy > -1$. Tedy na tomto okolí je funkce f dobře definována.

Musíme ji nyní dodefinovat v počátku. Aby měla totální diferenciál, musí být dodefinována spojitě. Uvažujme např. limitu po přímce $y = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = \frac{x}{x^2} \log(1+0) = 0.$$

Kandidátem na dodefinování je tedy pouze 0.

Dále pracujeme s funkcí

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x+y}{x^2+y^2} \log(1+xy), & (x, y) \in B((0, 0), \delta) \setminus \{(0, 0)\}, \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- Parciální derivace v bodě $(0, 0)$ spočteme z definice.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0+t, 0) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{t+0}{t^2+0^2} \log(1+t \cdot 0) - 0}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0}{t} = 0.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0, 0+t) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{0+t}{0^2+t^2} \log(1+0 \cdot t) - 0}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0}{t} = 0.$$

- Kandidátem na totální diferenciál v bodě $(0, 0)$ je tedy zobrazení

$$f(0, 0)(h_1, h_2) = 0h_1 + 0h_2.$$

Ověříme z definice, tedy se ptáme, zda:

$$\lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(0+h_1, 0+h_2) - f(0, 0) - \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0), \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)\right) \cdot (h_1, h_2)^T}{\|(h_1, h_2)\|} = 0.$$

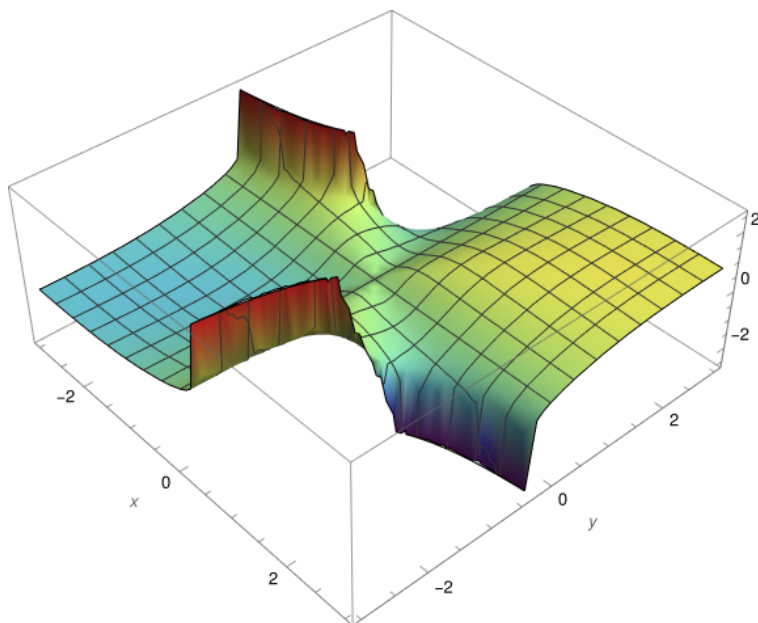
Konkrétně tedy

$$\lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0, 0)} \frac{\frac{h_1+h_2}{h_1^2+h_2^2} \log(1+h_1h_2) - 0 - 0}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0, 0)} \frac{(h_1+h_2) \log(1+h_1h_2)}{(h_1^2+h_2^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Pro přímku $h_2 = h_1$ dostáváme

$$\lim_{h_1 \rightarrow 0+} \frac{2h_1 \log(1+h_1^2)}{(2h_1^2)^{\frac{3}{2}}} = \lim_{h_1 \rightarrow 0+} \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\log(1+h_1^2)}{h_1^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Tedy kýžená limita nemůže být rovna 0, tedy totální diferenciál v počátku neexistuje.



6. Ověřte z definice totální diferenciál funkce $x^2 + y^2$ v bodě $[x_0, y_0]$.

Řešení:

Příklad i s řešením máme z: https://lide.uhk.cz/prf/ucitel/lipovji1/teaching/dif_pocet_vice_prom.pdf

- Na $\mathbb{R}^2$ máme parciální derivace

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= 2x \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 2y\end{aligned}$$

- Kandidátem na totální diferenciál v bodě (x_0, y_0) je tedy zobrazení

$$f(x_0, y_0)(h_1, h_2) = 2x_0h_1 + 2y_0h_2.$$

Počítáme tedy limitu

$$\begin{aligned}\lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0, 0)} \frac{(x_0 + h_1)^2 + (y_0 + h_2)^2 - x_0^2 - y_0^2 - 2x_0h_1 - 2y_0h_2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \\ = \lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0, 0)} \frac{h_1^2 + h_2^2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \\ = \lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0, 0)} \sqrt{h_1^2 + h_2^2} = 0,\end{aligned}$$

což bylo ukázati.

