



23. cvičení – Teoretické úložky

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Příklady

1. ☞ Sestrojte funkce $f_n(x) : [0, 1] \rightarrow [0, \infty)$ tak, že

(a) $\int_0^1 f(x) dx = 1$

(b) pro každé $x \in [0, 1]$ je $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$.

Tedy pro tuto posloupnost funkcí platí

$$1 = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx \neq \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx = \int_0^1 0 dx = 0.$$

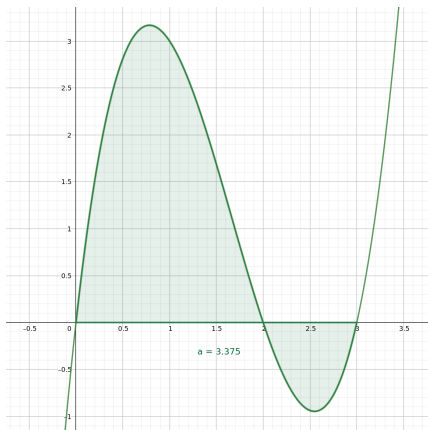
P.S.: Stačí obrázkem.

Řešení: např. $f_n(x) = 2n\chi_{[\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}]}$

2. [Pravda – Nepravda]

Nechť f je funkce, pak $\int_0^2 f(x) dx \leq \int_0^3 f(x) dx$.

Řešení: Ne. (Co když je f kladná nebo střídá znaménko? Pak to nefunguje.)



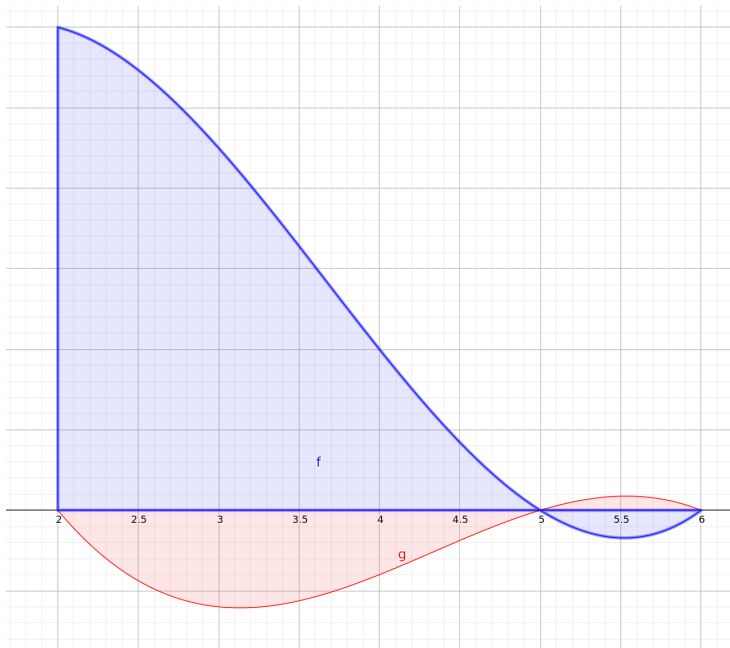
3. [Pravda – Nepravda]

(a) Jestliže $g(x) \leq f(x)$ pro všechna $2 \leq x \leq 6$ pak $\int_2^6 g(x) dx \leq \int_2^6 f(x) dx$.

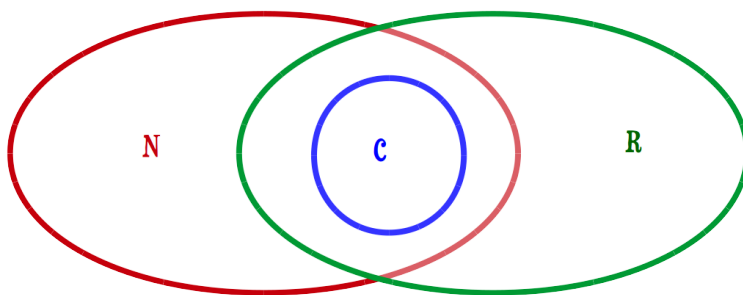
(b) Jestliže $\int_2^6 g(x) dx \leq \int_2^6 f(x) dx$, pak $g(x) \leq f(x)$ pro všechna $2 \leq x \leq 6$.

Řešení: Pravda, máme větu.

Ne. (Integrál vidí jen plochu, ale už ne, jak jsou funkce doopravdy velké.)



4. Doplňte do Vennova diagramu popisky:
 C - funkce spojité na $[a, b]$
 R - funkce Riemannovsky integrovatelné na $[a, b]$
 N - funkce Newtonovsky integrovatelné na (a, b)
 Najdete protipříklad, proč množiny nesplývají?



5. Na obrázku je lichá funkce. Jestliže víte, že $\int_{-2}^0 f(x) dx = 4$, určete

- (a) $\int_0^2 f(x) dx$
 (b) $\int_{-2}^2 f(x) dx$

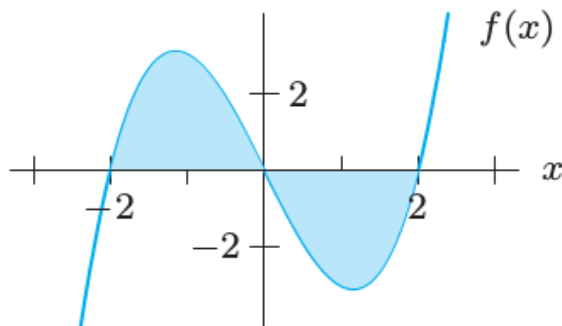


Figure 1: Applied Calculus 6th Edition by Deborah Hughes-Hallett

Řešení: -4, funkce je lichá, tedy kopečky jsou symetrické a musí mít stejný obsah. A obsahy pod osou x jsou záporné.

0, z věty o vlastnostech Newtonova integrálu stačí obě čísla sečíst.

Zkouškové příklady

Příklady i s řešením máme od prof. Spurného <https://www.karlin.mff.cuni.cz/~spurny/edu.php>

6. Uvažujte funkci

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = \frac{1}{n} \text{ pro nějaké } n \in \mathbb{N}, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Ukažte, že $(R)\int_0^1 f = 0$.

Řešení: Funkce f je omezená.

Zjevně $\underline{S}(f, D) = 0$ pro každé D dělení $[0, 1]$.

Dále: stačí ukázat, že $\forall \varepsilon > 0 \exists$ dělení D : $\overline{S}(f, D) < 2\varepsilon$. Pak bude

$$\int_0^1 f = 0$$

a

$$0 = \underline{\int}_0^1 f = \overline{\int}_0^1 f = 0$$

Zvolme $\varepsilon > 0$. Pak se funkce f na intervalu $[\varepsilon, 1]$ liší od nulové funkce pouze v konečně mnoha bodech. Tedy dle věty z přednášky platí, že $\int_\varepsilon^1 f = \int_\varepsilon^1 0 = 0$. Odtud existuje dělení D' intervalu $[\varepsilon, 1]$ tak, že

$$\overline{S}(f, D') < \varepsilon.$$

Uvažujme nyní dělení $D = \{0, \varepsilon\} \cup D'$. Pak

$$\overline{S}(f, D) \leq 1 \cdot \varepsilon + \overline{S}(f, D') \leq 2\varepsilon,$$

což jsme hledali.

7. Dokažte: Nechť f je spojitá reálná funkce na $[1, \infty)$ taková, že konverguje Newtonův integrál $\int_1^\infty f$. Pak

$$\sup \left\{ \left| \int_1^x f \right|, x \in [1, \infty) \right\} < \infty.$$

Řešení: Položme $F = \int_1^x f$, $x \geq 1$. Pak F je primitivní funkcí k f na $(1, \infty)$. Z předpokladů máme, že $\lim_{x \rightarrow 1+} F(x) = A \in \mathbb{R}$. Dále $\lim_{x \rightarrow 1+} F(x) = F(1) = 0$. Tedy F je spojitá na $[1, \infty)$ a má vlastní limitu v ∞ .

Odtud existuje $z \in (1, \infty)$ takové, že F je omezená na (z, ∞) . Navíc na $[1, z]$ je F omezená ze spojitosti na omezeném uzavřeném intervalu. Dohromady F je omezená na $[1, \infty)$.

Celkem

$$\sup \left\{ \left| \int_1^x f \right|, x \in [1, \infty) \right\} = \sup \{ |F(x)|, x \geq 1 \} < \infty.$$

Příklady máme od prof. Hencla <https://www.karlin.mff.cuni.cz/~hencl/edu.php>

8. Nechť $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá funkce. Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení (tedy je dokažte nebo najděte protipříklad):

- (a) Nechť $\int_1^\infty \frac{f(x)}{x^a} dx$ konverguje pro všechna $a > 0$. Pak $\int_1^\infty f(x) dx$ konverguje.

Řešení: Neplatí. Uvažujme $f = \frac{1}{x}$. Pak $\int_1^\infty \frac{1}{x}$ diverguje, ale $\int_1^\infty \frac{1}{x^{1+a}}$ konverguje pro všechna $a > 0$.

- (b) Nechť f je klesající a $\int_1^\infty f(x) dx$ konverguje. Pak $\int_1^\infty \frac{f(x)}{x} dx$ konverguje.

Řešení: Platí, vizte (c).

- (c) Nechť f je libovolná a $\int_1^\infty f(x) dx$ konverguje. Pak $\int_1^\infty \frac{f(x)}{x} dx$ konverguje.

Řešení: Platí z Abela (tedy platí i (b)). Uvažujme $g = \frac{1}{x}$. Pak g je na $[1, \infty)$ monotónní a spojitá. Navíc je omezená. Dále máme f je na $[1, \infty)$ spojitá a $\int_1^\infty f$ konverguje. Tedy z Abelova kritéria konverguje i $\int_1^\infty fg$.

9. Nechť $f, g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ jsou spojitě funkce a nechť konvergují integrály $(N)\int_0^\infty f(x) dx$ a $(N)\int_0^\infty g(x) dx$. Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení (tedy je dokažte nebo najděte protipříklad):

- (a) Nechť $f, g \geq 0$. Pak $(N)\int_0^\infty \max\{f(x), g(x)\} dx$ konverguje.

Řešení: Platí

$$\max\{f, g\} = \frac{f + g + |f - g|}{2}.$$

Tedy

$$\int_1^\infty \max\{f, g\} = \frac{1}{2} \int_1^\infty f + g + |f - g| = \frac{1}{2} \left(\int_1^\infty f + \int_1^\infty g + \int_1^\infty |f - g| \right).$$

První dva integrály konvergují z předpokladů, poslední konverguje ze srovnávacího kritéria, protože $|f - g| \leq |f| + |g|$.

- (b) Nechť f, g jsou libovolné. Pak $(N)\int_0^\infty \max\{f(x), g(x)\} dx$ konverguje.

Řešení: Neplatí. Položme $f = \frac{\sin x}{x}$, $g = -\frac{\sin x}{x}$. Oba integrály konvergují z Dirichletova kritéria. Ale $\max\{f, g\} = \frac{|\sin x|}{x}$, tedy $\int_1^\infty \max\{f, g\} dx$ diverguje.