



17. cvičení – Neabsolutní konvergence Newtonova integrálu

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Věta 1 (Abelovo-Dirichletovo kritérium konvergence Newtonova integrálu). Nechť $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^*$ a nechť $a < b$. Nechť $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá a F je primitivní funkce k funkci f na (a, b) . Dále nechť $g : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ je na $[a, b)$ monotónní a spojitá. Pak platí:

- (A) Jestliže $f \in \mathcal{N}(a, b)$ a g je omezená, pak $fg \in \mathcal{N}(a, b)$.
- (D) Je-li F omezená na (a, b) a $\lim_{x \rightarrow b-} g(x) = 0$, je $fg \in \mathcal{N}(a, b)$.

Algoritmus

1. Kde jsou **problematické** body?
 - (a) $\pm\infty$
 - (b) Jde funkce v krajním bodě do $\pm\infty$?
 - (c) Jde funkce v krajním bodě do 0, ale je tam **parametr**?
 - (d) Vyskytuje se v krajním bodě výraz $0/0$, $1/0$, ∞/∞ ?
 - (e) Je-li funkce **spojitá** až do kraje **omezeného uzavřeného** intervalu $\rightarrow$ konverguje absolutně.
2. **Mění funkce** na okolí problematického bodu **znaménko**? Je oscilující u nekonečna?
 - (a) **Nemění** znaménko $\rightarrow$ absolutní a neabsolutní konvergence splývá.
 - (b) **Mění** znaménko:
 - i. Je **AK** $\rightarrow$ Pak máme i neabsolutní konvergenci.
 - ii. Není AK, bylo by to těžké, nebo na AK nejsme tázáni $\rightarrow$ **Abel - Dirichlet**.
 - iii. Pozor, funkce se může chovat různě v různých bodech.
3. Dáváme **pozor** na **parametry**. Zejména pečlivě ověřujeme, zda jsme zjistili konvergenci i divergenci. Některá kritéria, např. SK nebo Abel-Dirichlet dávají jen jedno z toho.
4. Ověřujeme **podmínky**.
5. **Závěr**.

Příklady

Vyšetřete **absolutní i neabsolutní** konvergenci integrálů, jestliže $a, b, c \in \mathbb{R}$ a $\alpha, \beta, \gamma \in (0, \infty)$.

$$1. \clubsuit \int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{x} \sin x \, dx$$

$$2. \int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^\alpha} \sin x \, dx$$

$$3. \spadesuit \int_0^{+\infty} \frac{e^{\sin x}}{x^\alpha} \sin 2x \, dx$$

$$4. \clubsuit \int_0^1 \frac{\ln x \sin x}{x \arctan(1-x)} \, dx$$

$$5. \spadesuit \int_2^{+\infty} \frac{\ln x \sin x}{x \arctan(1-x)} \, dx$$

$$6. \heartsuit \int_0^{\pi/2} x^a \left(\frac{1}{2}\pi - x \right)^b \operatorname{tg}^c x \, dx$$

$$7. \clubsuit \int_0^{+\infty} \frac{\arctan^\alpha x \operatorname{arccot}^\beta x}{x^\gamma} \cos x \, dx$$

$$8. \spadesuit \int_0^{+\infty} \frac{\ln(e^{2x} + e^x + 1)}{x^{3/2}} \sin x \, dx$$

$$9. \clubsuit \int_0^{+\infty} \frac{\arctan^\alpha x}{\ln^\beta(1+x)} \sin x \, dx$$

$$11. * \star \int_{-1}^{+\infty} \sqrt[3]{\frac{x^2}{x+1}} \operatorname{arccot} x \sin x \, dx$$

$$10. * \star \int_0^{+\infty} \operatorname{arccot}^\alpha x \cos x \, dx$$

Bonus

12. Buď f spojitá a nezáporná funkce na intervalu $[a, \infty)$, $a > 0$. Necht' existuje $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \cdot x^\alpha = A$. Co můžeme říct o konvergenci $\int_a^\infty f$ v závislosti na A a α ?
13. Buď f spojitá a nezáporná funkce na intervalu $[a, b)$, $a, b \in \mathbb{R}$. Necht' existuje $\lim_{x \rightarrow b-} f(x) \cdot (x-b)^\alpha = A$. Co můžeme říct o konvergenci $\int_a^b f$ v závislosti na A a α ?
14. PRAVDA – NEPRAVDA

ANO – NE Jestliže $\int_a^b |f(x)|$ konverguje, pak $\int_a^b f(x)$ konverguje.

ANO – NE Jestliže $\int_a^b f(x)$ konverguje, pak $\int_a^b |f(x)|$ konverguje.

15. PRAVDA – NEPRAVDA

Necht' f je funkce spojitá na $[1, \infty)$.

ANO – NE Jestliže $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$, pak $\int_1^\infty f(x) \, dx$ konverguje.

ANO – NE $\heartsuit$ Jestliže $\int_1^\infty f(x) \, dx$ konverguje, pak $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$.

(1) Uvažujte $\frac{\sin x}{x} \cdot \arctan x$

(3) NElze použít Abela, najděte PF k $e^{\sin x} \sin 2x$

(4) Vyšetřujte AK

(5) AK: $\left| \frac{\log x}{\arctan(1-x)} \right| \geq \frac{2}{1}$, NAK: Uvažujte $\int_2^\infty \frac{x}{\log x} \sin x$ a pak $\int_2^\infty \frac{x}{\log x} \sin x \cdot \frac{\arctan(1-x)}{1}$.

(6) vyšetřujte jen AK

(7) 2x Abel

(8) NAK u ∞ : $\ln(e^{2x} + e^x + 1) \approx 2x$. Tedy pracujeme s integrálem $\int_1^\infty \frac{x}{\sin x} \cdot \frac{x}{\ln(e^{2x} + e^x + 1)}$ Pro monotonií:

(9) pro AK u ∞ : $|\ln(e^{2x} + e^x + 1)| \leq \sqrt{x}$ od jistého x .

(10) Pro AK Uvažujte $x^\alpha \operatorname{arccot} x \cdot \frac{x}{\cos x}$. Monotonie $x \operatorname{arccot} x$: zdřivňuje a substituujte $x = \cot y$.

(11) monotoniie jako v (10)