



4. cvičení – Neabsolutní konvergence

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Příklady

1. (a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt[n]{3} - 1)$$

Řešení: Otestujeme limitu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3} - 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3} - \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1 - 1 = 0.$$

Je vidět, že posloupnost $\sqrt[n]{3} - 1$ je nerostoucí, tedy z Leibnize řada konverguje,

(b)

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\log n}$$

Řešení: Řada konverguje podle Leibnizova kritéria, neboť $\frac{1}{\log n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Posloupnost $\frac{1}{\log n}$ je zjevně nerostoucí.

(c)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n^2 + 3n + 4}{3n^2 + 2}$$

Řešení: Řada nesplňuje nutnou podmínku konvergence

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 3n + 4}{3n^2 + 2} = \frac{2}{3} \neq 0,$$

tedy řada diverguje.

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2 + 2}$

Řešení: Označme $b_n = \frac{n}{n^2 + 2}$. Zjevně je $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2 + 2} = 0$. Abychom ukázali monotónnost, uvažujme funkci $f(x) = \frac{x}{x^2 + 2}$. Její derivace je:

$$f'(x) = \frac{-x^2 + 2}{(x^2 + 2)^2}.$$

Tedy platí, že $f'(x) < 0$ pro $x > \sqrt{2}$. Odtud máme, že posloupnost b_n je klesající pro $n \geq 2$.

Řada pak konverguje z Leibnizova kritéria.

2. (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) \operatorname{arccot}(n)$

Řešení: Položme $a_n = \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)$ a $b_n = \operatorname{arccot} n$. Pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ má omezené částečné součty. Posloupnost b_n je monotónní - nerostoucí a navíc $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$.

Z Dirichletova kritéria pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) \operatorname{arccot}(n)$ konverguje.

(b)

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos 2n}{\log n}$$

Řešení: Řada konverguje z Dirichletova kritéria, neboť $\cos(2n)$ má omezené částečné součty, $1/\log n \rightarrow 0$ a navíc je $1/\log n$ nerostoucí.

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(n) \frac{\arctan n}{n}$

Řešení:

Posloupnost $\sin n$ má omezené částečné součty. Posloupnost $\frac{1}{n}$ je nerostoucí a

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$. Tedy z Dirichleta konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$.

Posloupnost $\arctan n$ je monotónní a omezená, tedy z Abela konverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(n) \frac{\arctan n}{n}$.

(d)

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2 + 1}$$

Řešení:

Z Leibnizova kritéria: posloupnost $b_n = \frac{n}{n^2+1}$ má

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2 + 1} = 0$$

a je nerostoucí:

$$\begin{aligned} a_n &\geq a_{n+1} \\ \frac{n}{n^2 + 1} &\geq \frac{n+1}{n^2 + 2n + 1} \\ n^3 + 2n^2 + n &\geq n^3 + n + n^2 + 1 \\ n^2 &\geq 1 \end{aligned}$$

Tedy z Leibnizova kritéria řada konverguje.

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+n+10} \sin n$

Řešení: Posloupnost $\sin n$ má omezené částečné součty.

Dále máme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n^2+n+10} = 0.$$

Ukážeme, že posloupnost je nerostoucí, tedy že $a_n \geq a_{n+1}$:

$$\begin{aligned} a_n &\geq a_{n+1} \\ \frac{n+1}{n^2+n+10} &\geq \frac{n+1+1}{(n+1)^2+n+1+10} \\ (n+1)(n^2+3n+12) &\geq (n+2)(n^2+n+10) \\ n^3+4n^2+15n+12 &\geq n^3+3n^2+12n+20 \\ n^2+3n &\geq 8 \\ n(n+3) &\geq 8 \end{aligned}$$

Zřejmě platí pro $n \geq 2$.

Tedy daná posloupnost je nerostoucí od $n \geq 2$. Tedy z Dirichletova kritéria konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+n+10} \sin n$.

(f) Užijte faktu $2 \sin^2 n = 1 - \cos 2n$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n}$$

Řešení: Pomocí faktu výše píšeme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n}{n}.$$

První řada diverguje, druhá konverguje z Dirichleta (a faktů). Tedy součet vpravo je dobře definován a řada diverguje.

(g) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin(n + \frac{1}{n})}{\log(\log n)}$

Řešení:

Ze součtových vzorců máme

$$\sin\left(n + \frac{1}{n}\right) = \sin n \cos \frac{1}{n} + \cos n \sin \frac{1}{n}.$$

Řada $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin n}{\log(\log n)}$ pak konverguje z Dirichletova kritéria, neboť $\sum_{n=1}^{\infty} \sin n$ má omezené částečné součty a $\frac{1}{\log(\log n)}$ jde monotónně k 0.

Protože $\cos \frac{1}{n}$ je omezená $|\cos \frac{1}{n}| \leq 1$ a jde monotónně do 1 (plyne např. z náčrtku funkce $\cos x$), tak konverguje z Abela i řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \cos \frac{1}{n}}{\log(\log n)}$.

Analogicky se ukáže, že konverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n \sin \frac{1}{n}}{\log(\log n)}$.

A protože součet dvou konvergentních řad je konvergentní, konverguje i původní

řada $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin(n + \frac{1}{n})}{\log(\log n)}$.

(h) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$

Řešení:

Neboť $\sin \frac{1}{n}$ jde monotónně do 0 (jde vidět z grafu), tak řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin \frac{1}{n}$ konverguje z Leibnize.

Jelikož pak $\frac{n}{n+1}$ je omezená a rostoucí (možno ukázat derivací), tak z Abela konverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$.

3. (a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2n+10}{3n+1} \right)^n$

Řešení: Řada konverguje absolutně podle odmocninového kritéria, neboť

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+10}{3n+1} = \frac{2}{3} < 1.$$

(b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n$$

Řešení: Pro $|z| < 1$ konverguje absolutně podle limitního podílového kritéria, neboť

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{|(-1)^{n+2}| |z|^{n+1}}{n+1}}{\frac{|(-1)^{n+1}| |z|^n}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|z|}{1} \frac{n}{n+1} = |z| < 1.$$

Pro $|z| > 1$ diverguje, neboť limita koeficientů buď neexistuje nebo není nulová.

Pro $z = 1$ řada konverguje podle Leibnizova kritéria (neabsolutně), neboť posloupnost $\{\frac{1}{n}\}$ je monotónní a konverguje k nule.

Pro $z = -1$ řada diverguje, neboť $\frac{(-1)^{n+1}(-1)^n}{n} = -1/n$ a řada $\sum -\frac{1}{n}$ je harmonická s minusem.

(c)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n^2 + 3n + 4}{2n^4 + 3}$$

Řešení: Platí, že (pro $n \geq 4$)

$$\left| (-1)^n \frac{2n^2 + 3n + 4}{2n^4 + 3} \right| = \frac{2n^2 + 3n + 4}{2n^4 + 3} = \frac{1}{n^2} \frac{2 + 3/n + 4/n^2}{2 + 3/n^4} \leq \frac{1}{n^2} \frac{2 + 1 + 1}{2} = \frac{2}{n^2}.$$

Tento odhad dává absolutní konvergenci naší řady pomocí srovnávacího kritéria.

(d)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos(n^2\pi) (\sqrt{n+9} - \sqrt{n})$$

Řešení: Platí, že n^2 je liché, právě když n je liché. Proto

$$\cos(n^2\pi) = \cos(n\pi) = (-1)^n.$$

Dále je

$$\sqrt{n+9} - \sqrt{n} = \frac{9}{\sqrt{n+9} + \sqrt{n}} \geq \frac{9}{\sqrt{n}}.$$

Z těchto výpočtů je zřejmé, že řada absolutně konvergovat nemůže (řada $\frac{9}{\sqrt{n}}$ není konvergentní), ale konverguje neabsolutně podle Leibnizova kritéria.

(e)

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n + (-1)^n}$$

Řešení:

Absolutní konvergence je vyloučena odhadem $\frac{1}{2n+(-1)^n} \geq \frac{1}{2n-1}$. Ukážeme, že řada konverguje neabsolutně.

Leibnizovo kritérium lze použít přímo, protože nerovnosti

$$2n+1 \leq 2(n+1)-1, \quad 2n-1 \leq 2(n+1)+1 \implies \frac{1}{2n+(-1)^n} \geq \frac{1}{2(n+1)+(-1)^{n+1}}$$

jsou pravdivé.

Zkouškové příklady

Následující příklady i s řešením jsou od doc. Rokyty: <https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~rokyta/vyuka.html>

4. Vyšetřete **absolutní** i **neabsolutní** konvergenci řad. (Není-li napsáno jen NAK.)

- (a) $\clubsuit$ NAK $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)\sqrt{n+1}} \cos(3n+2)$
- (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n+3} \left(\ln \frac{n+3}{n+1} \right)^n$
- (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1}}{\sqrt{n}} \sin \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$
- (d) $\star$ NAK $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right) n \sin 2n$
- (e) $\clubsuit$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! + 1}{(n+2)! + 2}$
- (f) $\star$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{n}{2} + \binom{n}{3}}{\binom{n}{4} + \binom{n}{5}}$
- (g) $\clubsuit$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{10}}{2^n + 1} \sin(n\sqrt{\pi})$
- (h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n^3+1} - n}{\sqrt[3]{n^{3/4}+2} - \sqrt[3]{n^{3/4}+1}}$
- (i) $\heartsuit$ $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \ln \left(\frac{n+1}{n} \right) \right)^{n^2}$
- (j) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+2^n}{3^n} + \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}}{\sqrt[4]{n}} \right)$

4a

Příklad 2 :

- Nejprve upravíme:

$$\cos(3n + 2) = \cos 3n \cos 2 - \sin 3n \sin 2.$$

Víme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \sin nx$ má omezené částečné součty pro každé $x \in \mathbf{R}$ a že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \cos nx$ má omezené částečné součty pro každé $x \in \mathbf{R} \setminus \{2k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$. Proto mají řada $\sum_{n=1}^{\infty} \sin 3n$ i řada $\sum_{n=1}^{\infty} \cos 3n$ omezené částečné součty.

- Posloupnost $\left\{ \frac{n}{(n+1)\sqrt{n+1}} \right\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k nule a je pro všechna $n > 2$ klesající (jak lze ověřit například derivováním funkce $\frac{x}{(x+1)\sqrt{x+1}}$), proto podle Dirichletova kritéria konvergují řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)\sqrt{n+1}} \cos 3n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)\sqrt{n+1}} \sin 3n$, a tedy i řada

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)\sqrt{n+1}} \cos(3n+2) &= \\ &= \cos 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)\sqrt{n+1}} \cos 3n - \sin 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)\sqrt{n+1}} \sin 3n \end{aligned}$$

konverguje, neboť je lineární kombinací konvergentních řad.

Bodování při použití tohoto postupu při výpočtu:

- použití součtového vzorce pro kosinus 5 bodů
- omezenost částečných součtů $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(3n)$ resp. $\sum_{n=1}^{\infty} \cos(3n)$ 2 body
- $\frac{n}{(n+1)\sqrt{n+1}}$ jde monotónně k nule 5 bodů
- použití (zmínění) Dirichletova kritéria 2 body
- lineární kombinace konvergentních řad je konvergentní řada 1 bod

46

Příklad 3 : Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n+3} \left(\log \frac{n+3}{n+1} \right)^n,$$

kde $\log x (= \ln x)$ je přirozený logaritmus (logaritmus o základu e).

(15 bodů)

Řešení : Položme

$$a_n := \frac{n+1}{n+3} \left(\log \frac{n+3}{n+1} \right)^n.$$

Protože $\frac{n+3}{n+1} > 1$, je $a_n > 0$. Použijeme odmocninové kritérium:

$$\sqrt[n]{a_n} = \underbrace{\sqrt[n]{\frac{n+1}{n+3}}}_{=:b_n} \underbrace{\log \frac{n+3}{n+1}}_{=:c_n}.$$

Platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \log \frac{n+3}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \log \frac{1 + \frac{3}{n}}{1 + \frac{1}{n}} = \log 1 = 0,$$

kde jsme využili faktu, že $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$, aritmetiky limit a spojitosti logaritmu v bodě 1. Dále pro každé n přirozené platí $0 < \frac{n+1}{n+3} < 1$, tedy i

$$0 < \sqrt[n]{\frac{n+1}{n+3}} < 1,$$

odkud plyne, že posloupnost b_n je omezená². Podle věty, že limita součinu omezené posloupnosti a posloupnosti jdoucí k nule, je nula, tedy máme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 0,$$

což podle limitního odmocninového kritéria znamená, že zadaná řada konverguje.

Poznámka: Jinou možností bylo nejprve použít (limitního) srovnávacího kritéria, tj. buď si uvědomit, že pro všechna přirozená n platí

$$0 < \frac{n+1}{n+3} \left(\log \frac{n+3}{n+1} \right)^n < \left(\log \frac{n+3}{n+1} \right)^n,$$

nebo že platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n+1}{n+3} \left(\log \frac{n+3}{n+1} \right)^n}{\left(\log \frac{n+3}{n+1} \right)^n} = 1.$$

Ať již použijeme jeden či druhý argument, vidíme, že konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\log \frac{n+3}{n+1} \right)^n$ implikuje konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n+3} \left(\log \frac{n+3}{n+1} \right)^n$. Konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\log \frac{n+3}{n+1} \right)^n$ však dostaneme z odmocninového kritéria, jako výše.

Bodování při použití tohoto postupu výpočtu:

- aplikace odmocninového kritéria 3 body
- $a_n > 0$, aritmetika limit 2 + 2body
- výpočet limity logaritmu 4 bodů
- výpočet limity n -té odmocniny 4 bodů

Bodové srážky za nesprávná nebo zapomenutá odůvodnění:

- odůvodnění výpočtu limity (omezená krát posloupnost s nulovou limitou) 4 body

Bodová srážka za num. chybu, která nemění charakter výpočtu, je podle závažnosti 1-2 body.

²Samozřejmě je také možno spočítat limitu $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1$ například rozpisem obecné mocniny na exponenciálu a logaritmus, a obdržíme také $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 0$.

4c

Příklad 3 : Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1}}{\sqrt{n}} \sin \frac{1}{\sqrt[3]{n}}.$$

(15 bodů)

Řešení : Použijeme limitní srovnávací kritérium, členy vyšetřované řady budeme srovnávat s $\frac{1}{n^{4/3}}$. Čtenáři je tak v této chvíli dána možnost přijít na to, proč zrovna tato mocnina n je ta pravá... Pokud se necháte poddat, tak vezte, že pro velká n se

$$\frac{\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1}}{\sqrt{n}} = \frac{2}{\sqrt{n}(\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n-1})} \text{ „chová jako“ } \frac{1}{n},$$

zatímco (stále pro velká n) se

$$\sin \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \text{ „chová jako“ } \frac{1}{\sqrt[3]{n}}. \quad (2)$$

Nyní je potřeba tyto naše odhady matematicky přesně odůvodnit. Počítejme tedy, a nezapomeňme ani na odůvodnění výpočtu:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1}}{\sqrt{n}} \sin \frac{1}{\sqrt[3]{n}}}{\frac{1}{n^{4/3}}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{\sqrt{n}(\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n-1})} \frac{\sin \frac{1}{\sqrt[3]{n}}}{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\frac{2}{\sqrt{2 + \frac{1}{n}} + \sqrt{2 - \frac{1}{n}}}}_{=: A_n} \underbrace{\frac{\sin \frac{1}{\sqrt[3]{n}}}{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}}}_{=: B_n} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned} \quad (3)$$

Protože $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$, dostali jsme $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \frac{2}{2\sqrt{2}}$. Použili jsme větu o aritmetice limit, Heineovu větu a spojitost odmocniny. Pro posloupnost B_n platí (průběh a výsledek tohoto výpočtu je přesně to, co stojí za „odhadem“ v (2)):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{\sqrt[3]{n}}}{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}} \stackrel{(*)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Rovnost v (*) plyne ze základní limity $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ a Heineovy věty použité na posloupnost $\{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\}$, která sestává z nenulových členů a konverguje k 0. Tím je odůvodněn výpočet (3).

Protože limita v (3) je vlastní a nenulová, a protože obě srovnávané řady jsou řady s kladnými členy, konverguje námi vyšetřovaná řada právě tehdy, když konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{4/3}}$. Tato řada však konverguje podle věty, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ je konvergentní právě tehdy, když $\alpha > 1$.

Závěr: námi vyšetřovaná řada tedy konverguje.

Bodování při použití tohoto postupu výpočtu:

- odhad s jakou řadou srovnat 5 body
- číselný výpočet limity v (3) 6 bodů
- závěr, že řada konverguje 4 bodů

Bodové srážky za nesprávná nebo zapomenutá odůvodnění:

- uvedení, že $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ 1 bod
- aritmetika limit 1 bod
- Heineho věta 1 bod
- limita složené funkce 1 bod
- limitní srovnání: řady s nezápornými členy, limita vlastní a nenulová 1 bod
- uvedení, že $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ je konvergentní právě tehdy, když $\alpha > 1$ 1 bod

Bodová srážka za num. chybu, která nemění charakter výpočtu, je podle závažnosti 1-2 body.

Řešení písemné zkoušky z Matematické analýzy 1b (3)

LS 2008-09, 10. 6. 2009

Řešení zde uváděná jsou pouze jakýmsi podrobnějším návodem s mezivýsledky. Doporučujeme provést a rozmyslet si všechny úpravy a výpočty jako cvičení podrobně.

Příklad 1 : Dostaneme postupně tyto Taylorovy rozvoje:

$$\begin{aligned}\sqrt{1+y} &= 1 + \frac{1}{2}y - \frac{1}{8}y^2 + \frac{1}{16}y^3 + o(y^3), & y \rightarrow 0, \\ \sqrt{1+x^2} &= 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + o(x^5), & x \rightarrow 0, \\ \cos x \cdot \cos x^2 &= \left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^5)\right) \left(1 - \frac{1}{2}x^4 + o(x^5)\right) \\ &= 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{11}{24}x^4 + o(x^5), & x \rightarrow 0, \\ \sqrt{1+x^2} - \cos x \cdot \cos x^2 - x^2 &= \frac{1}{3}x^4 + o(x^5), & x \rightarrow 0.\end{aligned}$$

Odtud dostáváme

$$T_5^{f,0}(x) = \frac{1}{3}x^4.$$

Pokud jde o jmenovatele, tak dostáváme

$$\begin{aligned}\sqrt{e^{x^2}} &= \sqrt{1 + x^2 + \frac{1}{2}x^4 + o(x^5)} \\ &= 1 + \frac{1}{2} \left(x^2 + \frac{1}{2}x^4 + o(x^5)\right) - \frac{1}{8} \left(x^2 + \frac{1}{2}x^4 + o(x^5)\right)^2 + \frac{1}{16} \left(x^2 + \frac{1}{2}x^4 + o(x^5)\right)^3 + o(x^6) \\ &= 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}x^4 + o(x^5), & x \rightarrow 0.\end{aligned}$$

Pak platí

$$\sqrt{e^{x^2}} - \cos(x) - x^2 = \frac{1}{12}x^4 + o(x^5), \quad x \rightarrow 0.$$

Z výše uvedených rozvojų plyne

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\sqrt{\exp(x^2)} - \cos(x) - x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3}x^4 + o(x^5)}{\frac{1}{12}x^4 + o(x^5)} = 4.$$

Příklad 2 : Použijeme Dirichletovo kritérium:

- Víme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \sin nx$ má omezené částečné součty pro všechna $x \in \mathbf{R}$, proto i řada $\sum_{n=1}^{\infty} \sin 2n$ má omezené částečné součty.
- Platí

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} - \log \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right) x &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - x \log \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right) \\ &= \lim_{y \rightarrow 0+} \left(1 - \frac{\log(1+y)}{y} \right) = 0,\end{aligned}$$

4d

tedy i

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} - \log \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right) n = 0$$

podle Heineho věty.

- Označíme $f(x) := 1 - x \log \left(1 + \frac{1}{x} \right)$, potom

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} - \log \left(1 + \frac{1}{x} \right) = \frac{1}{x+1} - (\log(x+1) - \log x).$$

Podle Lagrangeovy věty o střední hodnotě pro libovolné $x \in (0, \infty)$ existuje $\xi_x \in (0, 1)$ takové, že

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+\xi_x} < 0 \quad \text{pro všechna } x > 0.$$

Funkce f je tedy klesající na intervalu $(0, \infty)$, a proto je i posloupnost $a_n = f(n)$ klesající.

Závěr: řada konverguje podle Dirichletova kritéria.

Poznámka: Monotonii funkce můžeme zdůvodnit i takto. Platí

$$f''(x) = \frac{1}{x(1+x)^2}, \quad x \in (0, \infty).$$

Funkce f' je tedy rostoucí na $(0, \infty)$ a $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 0$. Odtud plyne, že f' je záporná na $(0, \infty)$, a tedy f je na $(0, \infty)$ klesající.

Příklad 3 : Použijeme substituci $\sqrt{2x+1} = t$, tj. $x = \frac{1}{2}(t^2 - 1)$, $dx = t dt$. Dostaneme

$$I := \int_0^1 \frac{\sqrt{2x+1}}{(x+2)^2} dx = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{4t^2}{(t^2+3)^2} dt.$$

Rozkladem na parciální zlomky zjistíme

$$\frac{4t^2}{(t^2+3)^2} = \frac{4}{t^2+3} - \frac{12}{(t^2+3)^2}.$$

Zintegrovat $\frac{4}{t^2+3}$ není obtížné, primitivní funkci k funkci $\frac{12}{(t^2+3)^2}$ najdeme například pomocí rekurentní formule pro integrály typu $\int \frac{dx}{(x^2+1)^n}$. Celkově dostaneme

$$\int \left(\frac{4}{t^2+3} - \frac{12}{(t^2+3)^2} \right) dt \stackrel{c}{=} \frac{4}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{3}} - \frac{2t}{t^2+3} - \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{3}}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Tedy je

$$I = \left[\frac{4}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{3}} - \frac{2t}{t^2+3} - \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{3}} \right]_1^{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}\pi}{18} + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Příklad 4 : Označíme

$$f(x) = \frac{\log^\alpha(1+x) \sin^\beta x}{x^2(\pi-x)^3}$$

pro $x \in (0, \pi)$. Funkce f je na intervalu $(0, \pi)$ kladná a spojitá. Stačí tedy vyšetřit její chování v krajních bodech.

Bod 0. Položme $g(x) = \frac{x^\alpha x^\beta}{x^2} = x^{\alpha+\beta-2}$. Funkce g je na intervalu $(0, 1]$ kladná, spojitá a standardní výpočet ukazuje $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x)/g(x) = \pi^{-3} \in (0, \infty)$. Podle limitního srovnávacího kritéria

4e

Příklad 3 : Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! + 1}{(n+2)! + 2}$$

(15 bodů)

Řešení : Použijeme limitní srovnávací kritérium, členy vyšetřované řady budeme srovnávat s $\frac{1}{n^2}$. Pro velká n se totiž

$$a_n := \frac{n! + 1}{(n+2)! + 2} \text{ „chová jako“ } \frac{n!}{(n+2)!} = \frac{1}{(n+2)(n+1)} \text{ což se „chová jako“ } \frac{1}{n^2} =: b_n.$$

Nyní je potřeba tento náš odhad odůvodnit. Počítejme:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n! + 1)n^2}{(n+2)! + 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n!}}{\left(1 + \frac{2}{n}\right)\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \frac{2}{n^2 \cdot n!}} = 1, \quad (1)$$

s využitím faktu, že $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n!} = 0$ a podle věty o aritmetice limit.

Protože limita v (1) je vlastní a nenulová, a protože obě srovnávané řady jsou řady s kladnými členy, konverguje námi vyšetřovaná řada právě tehdy, když konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Tato řada však konverguje podle věty, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ je konvergentní právě tehdy, když $\alpha > 1$.

Závěr: námi vyšetřovaná řada tedy konverguje.

Bodování při použití tohoto postupu výpočtu:

- odhad s jakou řadou srovnat 5 bodů
- číselný výpočet limity v (1) 5 bodů
- závěr 5 bodů

Bodové srážky za nesprávná nebo zapomenutá odůvodnění:

- uvedení, že $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ apod. 1 bod
- aritmetika limit 1 bod
- limitní srovnání: řady s nezápornými členy, limita vlastní a nenulová 1 bod
- uvedení, že $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ je konvergentní právě tehdy, když $\alpha > 1$ 1 bod

Bodová srážka za num. chybu, která nemění charakter výpočtu, je podle závažnosti 1-2 body.

48

Příklad 3 : Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=5}^{\infty} \frac{\binom{n}{2} + \binom{n}{3}}{\binom{n}{4} + \binom{n}{5}},$$

kde $\binom{n}{k}$ je kombinační číslo „ n nad k “. (15 bodů)

Řešení :

Položme

$$a_n := \frac{\binom{n}{2} + \binom{n}{3}}{\binom{n}{4} + \binom{n}{5}}.$$

Úpravou čitatele i jmenovatele tohoto zlomku použitím vzorce $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}$ dostaneme

$$a_n = \frac{\frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{6}}{\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{120}} = \frac{60+20(n-2)}{5(n-2)(n-3)+(n-2)(n-3)(n-4)} = \frac{20}{(n-2)(n-3)}.$$

Použijeme limitní srovnávací kritérium. Za tím účelem nejprve odhadneme, jak se a_n chová pro velké hodnoty n . „Tipneme si“, že pro dostatečně velká n je možno zanedbat aditivní konstanty $(\dots - 2)$, $(\dots - 3)$ ve výrazech výše,

$$a_n \text{ se tedy „chová jako“ } \frac{1}{n^2}.$$

Označme tedy $b_n := \frac{1}{n^2}$. Lze ihned konstatovat, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ konverguje} \quad (6)$$

podle věty, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ konverguje právě tehdy, když $\alpha > 1$.

To, že se řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ „chovají stejně“, je ale nutné přesně ověřit:

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{20n^2}{(n-2)(n-3)} = \frac{20}{(1-\frac{2}{n})(1-\frac{3}{n})}.$$

Odtud ihned dostaneme, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 20, \quad (7)$$

protože $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\beta} = 0$ pro $\beta > 0$.

Obě řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ mají nezáporné členy, limita v (7) je vlastní a nenulová, plyne tedy z (6)

podle limitního srovnávacího kritéria, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

Bodování při použití tohoto postupu při výpočtu:

- úprava a_n 4 body
- určení b_n a spočtení (7) 5 bodů
- odůvodnění: zmínka, že $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ konverguje právě tehdy, když $\alpha > 1$ 1 bod
- odůvodnění: zmínka, že $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\beta} = 0$ pro $\beta > 0$ 1 bod
- odůvodnění užití limitního srovnávacího kritéria: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konverguje 1 bod
- odůvodnění užití limitního srovnávacího kritéria: (7) je vlastní a nenulová 2 body
- odůvodnění užití limitního srovnávacího kritéria: jde o řady s nezápornými členy 1 bod

Bodová srážka za num. chybu, která nemění charakter výpočtu, je podle závažnosti 1-2 body.

49
Příklad 2 : Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{10}}{2^n + 1} \sin(n\sqrt{\pi}).$$

(15 bodů)

Řešení : Využijeme znalost, že posloupnost (částečných součtů) $\sum_{n=1}^N \sin nx$ je pro pevné $x \in \mathbf{R}$ omezená – tedy že pro dané $x \in \mathbf{R}$ existuje $K > 0$ takové, že pro všechna $N \in \mathbf{N}$ platí

$$\left| \sum_{n=1}^N \sin nx \right| < K.$$

Pro $x = \sqrt{\pi}$ tedy dostaneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(n\sqrt{\pi})$ má omezenou posloupnost částečných součtů.

Pro ověření konvergence řady použijeme Dirichletovo kritérium, tedy bude stačit, pokud ukážeme, že

$$(i) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{10}}{2^n + 1} = 0,$$

$$(ii) \quad \frac{n^{10}}{2^n + 1} \text{ je monotónní posloupnost, alespoň od jistého indexu } n_0.$$

Ad (i): Výpočet uvedené limity není obtížný, snadno ji spočtete některou z metod 1. semestru.

Ad (ii): označme $a_n := \frac{n^{10}}{2^n + 1} > 0$, potom

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{10} \cdot (2^n + 1)}{n^{10} \cdot (2^{n+1} + 1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{10} \cdot \frac{1 + \frac{1}{2^n}}{2 + \frac{1}{2^n}} = \frac{1}{2} < 1, \quad (1)$$

tedy jistě existuje $n_0 \in \mathbf{N}$ takové, že $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ pro všechna $n \geq n_0$, $n \in \mathbf{N}$, tedy $a_{n+1} < a_n$ pro všechna $n \geq n_0$, $n \in \mathbf{N}$.

Jiný způsob, jak zjistit monotonii, je zkoumat znaménko derivace pomocné funkce

$$f(x) = \frac{x^{10}}{2^x + 1}, \quad \text{tj.} \quad f'(x) = \frac{x^9 2^x}{(2^x + 1)^2} \left[10 + \frac{10}{2^x} - x \log 2 \right], \quad x \in \mathbf{R}.$$

Protože výraz v hranatých závorkách jde k mínus nekonečnu pro $x \rightarrow +\infty$, existuje určitě takové $x_0 \in \mathbf{R}$, že $f'(x) < 0$ pro všechna $x > x_0$. Funkce f tedy klesá na intervalu $(x_0, +\infty)$, proto $a_{n+1} = f(n+1) < f(n) = a_n$ pro všechna $n \in \mathbf{N}$, $n > x_0$.

Závěr: řada konverguje podle Dirichletova kritéria.

Poznámka : Tento postup ukazuje, jak asi pracovat (zdůvodňovat) v případě použití Abel-Dirichletova kritéria. Pro tuto konkrétní řadu však existovalo mnohem jednodušší řešení: protože

$$\left| \frac{n^{10}}{2^n + 1} \sin(n\sqrt{\pi}) \right| \leq \frac{n^{10}}{2^n + 1} \quad \text{pro všechna } n \in \mathbf{N},$$

a řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{10}}{2^n + 1}$ konverguje dle podílového kritéria – viz (1), konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{10}}{2^n + 1} \sin(n\sqrt{\pi})$ absolutně, a tedy konverguje.

Bodování při použití tohoto postupu při výpočtu:

- zdůvodnění omezenosti částečných součtů 2 body
- výpočet limity 4 body
- ověření monotonie 6 bodů
- aplikace kritéria a závěr 3 body

42

Příklad 3 : Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n^3+1} - n}{\sqrt[3]{n^{3/4}+2} - \sqrt[3]{n^{3/4}+1}}.$$

(15 bodů)

Řešení :

Položme

$$a_n := \frac{\sqrt[3]{n^3+1} - n}{\sqrt[3]{n^{3/4}+2} - \sqrt[3]{n^{3/4}+1}}.$$

Rozšířením čitatele i jmenovatele tohoto zlomku dvojnásobným použitím vzorce $A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$ (například pro úpravu čitatele klademe $A = \sqrt[3]{n^3+1}$, $B = n$) dostaneme

$$a_n = \frac{1}{(n^3+1)^{\frac{2}{3}} + n(n^3+1)^{\frac{1}{3}} + n^2} \cdot \frac{(n^{\frac{3}{4}}+2)^{\frac{2}{3}} + (n^{\frac{3}{4}}+2)^{\frac{1}{3}}(n^{\frac{3}{4}}+1)^{\frac{1}{3}} + (n^{\frac{3}{4}}+1)^{\frac{2}{3}}}{1}.$$

Použijeme limitní srovnávací kritérium. Za tím účelem nejprve odhadneme, jak se a_n chová pro velké hodnoty n . „Tipneme si“, že pro dostatečně velká n je možno zanedbat aditivní konstanty $(\dots+2)$ a $(\dots+1)$ ve výrazech výše, a_n se tedy „chová jako“

$$b_n := \frac{n^{\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3}}}{n^2} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}.$$

Mimo jiné je nyní vidět, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ konverguje} \quad (6)$$

podle věty, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ konverguje právě tehdy, když $\alpha > 1$.

To, že se řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ „chovají stejně“, je ale nutné přesně ověřit:

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{b_n} &= \frac{\left[(n^{\frac{3}{4}}+2)^{\frac{2}{3}} + (n^{\frac{3}{4}}+2)^{\frac{1}{3}}(n^{\frac{3}{4}}+1)^{\frac{1}{3}} + (n^{\frac{3}{4}}+1)^{\frac{2}{3}} \right] \cdot n^{\frac{3}{2}}}{(n^3+1)^{\frac{2}{3}} + n(n^3+1)^{\frac{1}{3}} + n^2} = \\ &= \frac{\left[\left(1 + \frac{2}{n^{\frac{3}{4}}}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(1 + \frac{2}{n^{\frac{3}{4}}}\right)^{\frac{1}{3}} \left(1 + \frac{1}{n^{\frac{3}{4}}}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(1 + \frac{1}{n^{\frac{3}{4}}}\right)^{\frac{2}{3}} \right] \cdot n^{\frac{1}{2}} \cdot n^{\frac{3}{2}}}{\left[\left(1 + \frac{1}{n^3}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(1 + \frac{1}{n^3}\right)^{\frac{1}{3}} + 1 \right] \cdot n^2}. \end{aligned}$$

Po vykrácení tohoto zlomku výrazem n^2 tedy dostaneme, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1, \quad (7)$$

protože $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\beta} = 0$ pro $\beta > 0$.

Obě řady mají nezáporné členy, takže z (7) a z (6) plyne podle limitního srovnávacího kritéria, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

Bodování při použití tohoto postupu při výpočtu:

- úprava a_n (rozšíření zlomku) 4 body
- určení b_n 4 body
- ověření (7) 4 body
- odůvodnění 3 body

4i

Příklad 3 : Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \log \left(\frac{n+1}{n} \right) \right)^{n^2},$$

kde symbolem $\log$ značíme přirozený logaritmus, tedy logaritmus o základu e . (15 bodů)

Řešení : Položíme $a_n := \left(1 - \log \left(\frac{n+1}{n} \right) \right)^{n^2}$. Protože platí $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \log \left(\frac{n+1}{n} \right) \right) = 1$, je určitě $a_n \geq 0$ pro všechna dostatečně velká přirozená¹ n , a můžeme proto použít (limitní) odmocninové kritérium.

Platí:

$$\sqrt[n]{a_n} = \left(1 - \log \left(\frac{n+1}{n} \right) \right)^n = e^{n \log(1 - \log(\frac{n+1}{n}))} =: e^{A_n}.$$

Dále je

$$A_n = n \log \left(1 - \log \left(\frac{n+1}{n} \right) \right) = \underbrace{n}_{P_n} \cdot \underbrace{\log \left(1 - \log \frac{n+1}{n} \right)}_{Q_n} \cdot \underbrace{\frac{-\log \frac{n+1}{n}}{-\left(\frac{n+1}{n} - 1 \right)}}_{R_n} \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{n+1}{n} \right)}_{S_n}.$$

Všimněte si, jakých úprav používáme, abychom co nejvíce při výpočtu $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n$ využili základních limit pro logaritmus. Dále už je výpočet jednoduchý, i když jeho správné odůvodnění v sobě skýtá jisté možnosti nečekaných bodových ztrát:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n \cdot S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \left(-\frac{1}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1) = -1,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Q_n = 1 \quad (\text{základní limita pro logaritmus a využití Heineho věty s } y_n = -\log \frac{n+1}{n}),$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 1 \quad (\text{obdobné odůvodnění jako pro } Q_n).$$

Celkově tedy je podle věty o aritmetice limit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = -1, \quad \text{a proto} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

Protože $1/e < 1$, plyne z limitního odmocninového kritéria, že námi vyšetřovaná řada konverguje.

Bodování při použití tohoto postupu výpočtu:

- $a_n \geq 0$ 2 body
- výpočet Q_n 4 body
- výpočet R_n 3 body
- $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = -1$ 2 body
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = e^{-1}$ 1 bod
- závěr, že řada konverguje dle odm. kritéria 3 body

Bodové srážky za nesprávná nebo zapomenutá odůvodnění:

- odůvodnění limity složené funkce 2 body
- aritmetika limit 1 bod

Bodová srážka za num. chybu, která nemění charakter výpočtu, je podle závažnosti 1-2 body.

¹Dá se dokonce jednoduše spočítat, že $\left(1 - \log \left(\frac{n+1}{n} \right) \right) \geq 0$ a tedy i $a_n \geq 0$ pro všechna přirozená n , není to však nutné: odmocninové kritérium potřebuje pouze, aby existovalo přirozené n_0 , že $a_n \geq 0$ pro všechna přirozená $n \geq n_0$.

4j

Příklad 3 : Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+2^n}{3^n} + \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}}{\sqrt[4]{n}} \right).$$

(15 bodů)

Řešení : Položme

$$x_n := \frac{1+2^n}{3^n}, \quad y_n := \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}}{\sqrt[4]{n}}. \quad (6)$$

Není těžké odhadnout, že x_n „se chová pro velká n jako“ $\left(\frac{2}{3}\right)^n$, a také, že $y_n = \frac{1}{\sqrt[4]{n}(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1})}$ „se chová pro velká n jako“ $\frac{1}{n^{1/4+1/2}} = \frac{1}{n^{3/4}}$.

Přesněji, pro x_n máme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{\left(\frac{2}{3}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2^n}{3^n} \cdot \frac{3^n}{2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2^n} + 1 \right) = 1, \quad (7)$$

zatímco pro y_n máme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{\frac{1}{n^{1/4+1/2}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{n} \cdot \sqrt{n}}{\sqrt[4]{n}(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{n}} + \sqrt{1+\frac{1}{n}}} = \frac{1}{2}. \quad (8)$$

Ve výpočtech používáme věty o aritmetice limit, skutečnosti, že $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n = \infty$ a $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$.

Protože řada $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$ konverguje (buď podle odmocninového kritéria nebo konstatováním faktu, že jde o geometrickou řadu s kvocientem $\frac{2}{3}$), dále pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/4}}$ diverguje (s využitím znalosti, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\gamma}$ konverguje právě tehdy, když $\gamma > 1$), a konečně protože členy všech čtyř řad v (7), (8) jsou nezáporné, dostaneme dvojím použitím limitního srovnávacího kritéria, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2^n}{3^n} \text{ konverguje, zatímco } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}}{\sqrt[4]{n}} \text{ diverguje.}$$

První možnost zakončení: Z výše uvedeného již plyne, že řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+2^n}{3^n} + \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}}{\sqrt[4]{n}} \right) \text{ diverguje,}$$

neboť kdyby tato řada konvergovala, musela by (protože rozdíl dvou konvergenčních řad je konvergentní řada) konvergovat i řada $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+2^n}{3^n} + \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}}{\sqrt[4]{n}} \right) - \left(\frac{1+2^n}{3^n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}}{\sqrt[4]{n}}$, což není pravda.

Druhá možnost zakončení: Pro všechna přirozená n platí $\frac{1+2^n}{3^n} + \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}}{\sqrt[4]{n}} > \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}}{\sqrt[4]{n}}$ a protože řada $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}}{\sqrt[4]{n}} \right)$ diverguje, diverguje podle srovnávacího kritéria i řada, kterou jsme měli vyšetřit.

Bodování při použití prvního postupu při výpočtu (při druhém budou body přerozděleny):

- konvergence $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 5 bodů
- divergence $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ 6 bodů
- divergence $\sum_{n=1}^{\infty} (x_n + y_n)$ 4 body

Bodové srážky za nesprávná nebo zapomenutá odůvodnění:

- odůvodnění: $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$ konverguje a proč 1+1 bod
- odůvodnění: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/4}}$ diverguje a proč 1+1 bod
- odůvodnění: zmínky, že $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\beta} = 0$ pro $\beta > 0$ 1 bod
- odůvodnění užití limit. srov. krit.: limity (7), (8) jsou vlastní a nenulové 1 bod
- odůvodnění užití limit. srov. krit.: jde o řady s nezápornými členy 1 bod

Bodová srážka za num. chybu, která nemění charakter výpočtu, je podle závažnosti 1-2 body.

Bonus

5.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n \sin n}{n^2 + 1}$$

Řešení:

Upravíme nyní člen řady na tvar

$$(-1)^n \frac{n \sin n}{n^2 + 1} = (-1)^n \frac{\sin n}{n} \cdot \frac{n^2}{n^2 + 1}.$$

Dokážeme-li nyní konvergenci řady $\sum_n (-1)^n \frac{\sin n}{n}$, pak, vzhledem k tomu, že posloupnost $\{\frac{n^2}{n^2+1}\}$ je zřejmě omezená (má limitu) a monotónní, z Abelova kritéria bude vyplývat také neabsolutní konvergence vyšetřované řady.

Nyní použijeme **triku** rozdělení řady na dvě, na řadu sudých a lichých členů.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin n}{n} \stackrel{?}{=} \sum_{n=1,3,5,\dots} (-1)^n \frac{\sin n}{n} + \sum_{n=2,4,6,\dots} (-1)^n \frac{\sin n}{n}$$

což po úpravě dává

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin n}{n} \stackrel{?}{=} \sum_{n=1,3,5,\dots} -\frac{\sin n}{n} + \sum_{n=2,4,6,\dots} \frac{\sin n}{n}$$

Z následující poznámky plyne, že pokud dokážeme konvergenci řad na pravé straně, pak konverguje také řada na straně levé a rovnost s otazníkem platí.

Avšak konvergence obou řad na pravé straně plyne z Dirichletova kritéria. Protože $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ monotónně, stačí ověřit stejnou omezenost částečných součtů řad $\sum_n \sin n$ sčítaných přes sudé a liché členy.

Řada $\sum_n \sin nx$ má totiž omezené částečné součty pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Položením $x = 2$ tedy zjišťujeme, že řada $\sum_n \sin(2n) = \sum_{n=2,4,\dots} \sin n$ má omezené částečné součty. A protože

$$\left| \sum_{n=1,3,5,\dots}^N \sin n \right| = \left| \sum_{n=1}^N \sin n - \sum_{n=2,4,6,\dots}^N \sin n \right| \leq \left| \sum_{n=1}^N \sin n \right| + \left| \sum_{n=2,4,6,\dots}^N \sin n \right|$$

a obě řady napravo mají stejně omezené částečné součty, plyne odtud stejná omezenost částečných součtů i pro řadu lichých členů.

Tím je neabsolutní konvergence vyšetřované řady dokázána.

6. Necht' $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je konvergentní (K), $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ jsou divergentní (D). (Řady mohou mít i nezáporné členy). Rozhodněte, zda musí platit:

- (a) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n + c_n$ K Nepravda.

Pro spor předpokládejme, že $\sum_{n=1}^{\infty} a_n + c_n$ je konvergentní. Pak z linearit máme i konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + c_n) - a_n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n,$$

což je spor.

- (b) $\sum_{n=1}^{\infty} c_n + d_n$ D Nepravda, např. $c_n = n, d_n = -n$.
- (c) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n - b_n$ K Pravda, plyne z věty o linearitě.
- (d) $\sum_{n=1}^{\infty} k \cdot a_n + l \cdot b_n, k, l \in \mathbb{R}$, K Pravda, plyne z věty o linearitě.
- (e) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$ K Nepravda, např. $a_n = b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$
- (f) $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot d_n$ K Nepravda, např. $c_n = d_n = n$.
- (g) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot d_n$ K Nepravda, např. $b_n = \frac{1}{n^2}, d_n = n^3$.