3. cvičení – Taylor v řadách

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Příklady

1. Vyšetřete **absolutní** konvergenci řad.

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n} - \arcsin \frac{1}{n}$

   Řešení:
   Položme $a_n = \sin \frac{1}{n} - \arcsin \frac{1}{n}$. Dále uvažujme posloupnost $x_n = \frac{1}{n}$. Zřejmě $x_n \to 0$.
   Položme funkci $f(x) = \sin x - \arcsin x$. Pak platí $f(x_n) = a_n$.
   Rozvineme $f(x)$ do Taylora v 0:

$$\begin{aligned} \sin x &= x - \frac{x^3}{6} + o(x^4), \quad x \to 0 \\ \arcsin x &= x + \frac{x^3}{6} + o(x^4), \quad x \to 0 \\ f(x) &= \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right) - \left(x + \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right) \\ &= -\frac{1}{3}x^3 + o(x^4), \quad x \to 0. \end{aligned}$$

   Nejsilnější člen je tedy x^3.
   Použijeme tedy LSK s $b_n = \left(\frac{1}{n}\right)^3 = \frac{1}{n^3}$ a budeme vyšetřovat absolutní konvergenci.
   Počítáme tedy limitu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{|\sin \frac{1}{n} - \arcsin \frac{1}{n}|}{\frac{1}{n^3}}$$

   Prve spočteme limitu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin \frac{1}{n} - \arcsin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^3}}$$

   Aplikujeme Heineho, $x_n = \frac{1}{n}$, $x_n \to 0$, $x_n \neq 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Potřebujeme tedy spočítat limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{3}x^3 + o(x^4)}{x^3} = -\frac{1}{3}.$$

   Odtud i

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin \frac{1}{n} - \arcsin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^3}} = -\frac{1}{3}.$$

   Z větičky o limitě a absolutní hodně pak platí i

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{b_n} = \frac{1}{3}.$$

   Tedy $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konverguje právě tehdy, když konverguje $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Protože $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je konvergentní, tak je konvergentní i $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2\left[\operatorname{tg}\left(\frac{1}{n^{1/5}}\right)-\sin\left(\frac{1}{n^{1/5}}\right)\right]-\frac{1}{n^{3/5}}$

Řešení:
Položme $a_n = 2\left[\operatorname{tg}\left(\frac{1}{n^{1/5}}\right)-\sin\left(\frac{1}{n^{1/5}}\right)\right]-\frac{1}{n^{3/5}}$. Dále uvažujme posloupnost $x_n = \frac{1}{n^{1/5}}$. Zřejmě $x_n \to 0$.
Položme funkci $f(x) = 2(\tan x - \sin x) - x^3$. Pak platí $f(x_n) = a_n$.
Rozvineme $f(x)$ do Taylora v 0:

$$\begin{aligned}
\tan x &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5), \quad x \to 0\\
\sin x &= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5), \quad x \to 0\\
f(x) &= 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5) - \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)\right)\right) - x^3\\
&= \frac{1}{4}x^5 + o(x^6), \quad x \to 0.
\end{aligned}$$

Nejsilnější člen je tedy x^5.
Použijeme tedy LSK s $b_n = \left(\frac{1}{\sqrt[5]{n}}\right)^5 = \frac{1}{n}$ a budeme vyšetřovat absolutní konvergenci.
Počítáme tedy limitu

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left|2\left[\operatorname{tg}\left(\frac{1}{n^{1/5}}\right)-\sin\left(\frac{1}{n^{1/5}}\right)\right]-\frac{1}{n^{3/5}}\right|}{\frac{1}{n}}$$

Prve spočteme limitu

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2\left[\operatorname{tg}\left(\frac{1}{n^{1/5}}\right)-\sin\left(\frac{1}{n^{1/5}}\right)\right]-\frac{1}{n^{3/5}}}{\frac{1}{n}}$$

Aplikujeme Heineho, $x_n = \frac{1}{n^{1/5}}$, $x_n \to 0$, $x_n \neq 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Potřebujeme tedy spočítat limitu

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^5} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{4}x^5 + o(x^5)}{x^5} = \frac{1}{4}.$$

Odtud i

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2\left[\operatorname{tg}\left(\frac{1}{n^{1/5}}\right)-\sin\left(\frac{1}{n^{1/5}}\right)\right]-\frac{1}{n^{3/5}}}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{4}.$$

Z větičky o limitě a absolutní hodně pak platí i

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{b_n} = \frac{1}{4}.$$

Tedy $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ konverguje právě tehdy, když konverguje $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Protože $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je divergentní, tak je divergentní i $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$.

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n} - \arcsin\frac{1}{n}\right)$

Řešení:
Položme $a_n = \sin\left(\frac{1}{n} - \arcsin\frac{1}{n}\right)$. Dále uvažujme posloupnost $x_n = \frac{1}{n}$. Zřejmě $x_n \to 0$.
Položme funkci $f(x) = \sin(x - \arcsin x)$. Pak platí $f(x_n) = a_n$.
Rozvineme $f(x)$ do Taylora v 0:

$$\begin{aligned}
\sin x &= x - \frac{x^3}{6} + o(x^4), \quad x \to 0\\
\arcsin x &= x + \frac{x^3}{6} + o(x^4), \quad x \to 0\\
x - \arcsin x &= -\frac{x^3}{6} + o(x^4), \quad x \to 0\\
f(x) &= -\frac{1}{6}x^3 + o(x^4), \quad x \to 0.
\end{aligned}$$

Nejsilnější člen je tedy x^3.
Použijeme tedy LSK s $b_n = \left(\frac{1}{n}\right)^3 = \frac{1}{n^3}$ a budeme vyšetřovat absolutní konvergenci.
Počítáme tedy limitu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left|\sin\left(\frac{1}{n} - \arcsin\frac{1}{n}\right)\right|}{\frac{1}{n^3}}$$

Prve spočteme limitu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(\frac{1}{n} - \arcsin\frac{1}{n})}{\frac{1}{n^3}}$$

Aplikujeme Heineho, $x_n = \frac{1}{n}$, $x_n \to 0$, $x_n \neq 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Potřebujeme tedy spočítat limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{6}x^3 + o(x^4)}{x^3} = -\frac{1}{6}.$$

Odtud i

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(\frac{1}{n} - \arcsin\frac{1}{n})}{\frac{1}{n^3}} = -\frac{1}{6}.$$

Z větičky o limitě a absolutní hodně pak platí i

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{b_n} = \frac{1}{6}.$$

Tedy $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konverguje právě tehdy, když konverguje $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Protože $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je konvergentní, tak je konvergentní i $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\frac{1}{n^\beta} - \ln\left(\sin\frac{1}{n^\beta}\right)$, $\beta > 0$

Řešení:
Položme $a_n = \ln\frac{1}{n^\beta} - \ln\left(\sin\frac{1}{n^\beta}\right)$. Dále uvažujme posloupnost $x_n = \frac{1}{n^\beta}$. . Zřejmě $x_n \to 0$.

Položme funkci $f(x) = \ln x - \ln(\sin x) = \ln \frac{x}{\sin x} = -\ln \frac{\sin x}{x}$. Pak platí $f(x_n) = a_n$. Rozvineme $f(x)$ do Taylora v 0:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4), \quad x \to 0$$
$$\frac{1}{x}\sin x = 1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3), \quad x \to 0$$
$$f(x) = \frac{1}{6}x^2 + o(x^2), \quad x \to 0.$$

Nejsilnější člen je tedy x^2.
Použijeme tedy LSK s $b_n = \left(\frac{1}{n^\beta}\right)^2 = \frac{1}{n^{2\beta}}$ a budeme vyšetřovat absolutní konvergenci.
Počítáme tedy limitu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left|\ln \frac{1}{n^\beta} - \ln\left(\sin \frac{1}{n^\beta}\right)\right|}{\frac{1}{n^{2\beta}}}$$

Prve spočteme limitu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln \frac{1}{n^\beta} - \ln\left(\sin \frac{1}{n^\beta}\right)}{\frac{1}{n^{2\beta}}}$$

Aplikujeme Heineho, $x_n = \frac{1}{n^\beta}$, $x_n \to 0$, $x_n \neq 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Potřebujeme tedy spočítat limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{6}x^2 + o(x^2)}{x^2} = \frac{1}{6}.$$

Odtud i

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln \frac{1}{n^\beta} - \ln\left(\sin \frac{1}{n^\beta}\right)}{\frac{1}{n^{2\beta}}} = \frac{1}{6}.$$

Z větičky o limitě a absolutní hodně pak platí i

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{b_n} = \frac{1}{6}.$$

Tedy $\sum_{n=1}^\infty |a_n|$ konverguje právě tehdy, když konverguje $\sum_{n=1}^\infty b_n$. Protože $\sum_{n=1}^\infty b_n$ je konvergentní právě tehdy, když $\beta > \frac{1}{2}$, tak i $\sum_{n=1}^\infty |a_n|$ je konvergentní právě tehdy, když $\beta > \frac{1}{2}$.

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin \frac{1}{n} - \frac{1}{n}\right) \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

Řešení:
Položme $a_n = \left(\sin \frac{1}{n} - \frac{1}{n}\right) \frac{1}{n^\alpha}$, dále položme $c_n = \left(\sin \frac{1}{n} - \frac{1}{n}\right)$. Dále uvažujme posloupnost $x_n = \frac{1}{n}$. Zřejmě $x_n \to 0$.
Položme funkci $f(x) = \sin x - x$. Pak platí $f(x_n) = c_n$.
Rozvineme $f(x)$ do Taylora v 0:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4), \quad x \to 0$$
$$\begin{aligned} f(x) &= \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right) - x \\ &= -\frac{1}{6}x^3 + o(x^4), \quad x \to 0. \end{aligned}$$

Nejsilnější člen je tedy x^3.
Použijeme tedy LSK s $b_n = \left(\frac{1}{n}\right)^3 \cdot \frac{1}{n^\alpha} = \frac{1}{n^{3+\alpha}}$ a budeme vyšetřovat absolutní konvergenci.
Počítáme tedy limitu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left|\left(\sin\frac{1}{n} - \frac{1}{n}\right)\frac{1}{n^\alpha}\right|}{\frac{1}{n^{3+\alpha}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left|\left(\sin\frac{1}{n} - \frac{1}{n}\right)\right|}{\frac{1}{n^3}}$$

Prve spočteme limitu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{n} - \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^3}}$$

Aplikujeme Heineho, $x_n = \frac{1}{n}$, $x_n \to 0$, $x_n \neq 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Potřebujeme tedy spočítat limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{3}x^3 + o(x^4)}{x^3} = -\frac{1}{3}.$$

Odtud i

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{n} - \arcsin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^3}} = -\frac{1}{6}.$$

Z větičky o limitě a absolutní hodně pak platí i

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{b_n} = \frac{1}{6}.$$

Tedy $\sum_{n=1}^\infty |a_n|$ konverguje právě tehdy, když konverguje $\sum_{n=1}^\infty b_n$. Protože $\sum_{n=1}^\infty b_n$ je konvergentní právě tehdy, když $\alpha > -2$, tak je konvergentní i $\sum_{n=1}^\infty |a_n|$ právě pro $\alpha > -2$.

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}$

Řešení: Položme $a_n = \sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n} = \sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}} - 2\sqrt{1+\frac{1}{n}} + 1\right)$.
Dále položme $c_n\sqrt{1+\frac{2}{n}} - 2\sqrt{1+\frac{1}{n}} + 1$. Uvažujme posloupnost $x_n = \frac{1}{n}$. Zřejmě $x_n \to 0$.
Položme funkci $f(x) = \sqrt{1+2x} - 2\sqrt{1+x} + 1$. Pak platí $f(x_n) = c_n$.
Rozvineme $f(x)$ do Taylora v 0:

$$\begin{aligned}
\sqrt{1+2x} &= 1 + \frac{1}{2}(2x) - \frac{1}{8}(2x)^2 + o(x^2), \quad x \to 0 \\
\sqrt{1+x} &= 1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2), \quad x \to 0 \\
f(x) &= -\frac{1}{4}x^2 + o(x^2), \quad x \to 0.
\end{aligned}$$

Nejsilnější člen je tedy x^2.
Použijeme tedy LSK s $b_n = \sqrt{n}\left(\frac{1}{n}\right)^2 = \frac{1}{n^{3/2}}$ a budeme vyšetřovat absolutní konvergenci.

Počítáme tedy limitu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left|\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}} - 2\sqrt{1+\frac{1}{n}} + 1\right)\right|}{\frac{1}{n^{3/2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left|\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}} - 2\sqrt{1+\frac{1}{n}} + 1\right)\right|}{\frac{1}{n^2}}$$

Prve spočteme limitu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}} - 2\sqrt{1+\frac{1}{n}} + 1\right)}{\frac{1}{n^2}}$$

Aplikujeme Heineho, $x_n = \frac{1}{n}$, $x_n \to 0$, $x_n \neq 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Potřebujeme tedy spočítat limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{4}x^2 + o(x^2)}{x^2} = -\frac{1}{4}.$$

Odtud i

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}} - 2\sqrt{1+\frac{1}{n}} + 1\right)}{\frac{1}{n^2}} = -\frac{1}{4}.$$

Z větičky o limitě a absolutní hodně pak platí i

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{b_n} = \frac{1}{4}.$$

Tedy $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konverguje právě tehdy, když konverguje $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Protože $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je konvergentní, tak je konvergentní i $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)^p$, $p \in \mathbb{R}$

Řešení:

Položme $a_n = \left(e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^p$ a $c_n = e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Dále uvažujme posloupnost $x_n = \frac{1}{n}$. Zřejmě $x_n \to 0$.

Položme funkci $f(x) = e\left(1 - e^{\frac{1}{x}\log(1+x)-1}\right)$. Pak platí $f(x_n) = c_n$.

Rozvineme $f(x)$ do Taylora v 0:

$$\begin{aligned}
\log(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + o(x^2), \quad x \to 0 \\
\frac{1}{x}\log(1+x) &= 1 - \frac{x}{2} + o(x), \quad x \to 0 \\
e^{\frac{1}{x}\log(1+x)-1} &= 1 - \frac{x}{2} + o(x), \quad x \to 0 \\
f(x) &= e\frac{x}{2} + o(x), \quad x \to 0
\end{aligned}$$

Nejsilnější člen je tedy x.

Použijeme tedy LSK s $b_n = \left(\frac{1}{n}\right)^p$ a budeme vyšetřovat absolutní konvergenci.

Počítáme tedy limitu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left|\left(e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^p\right|}{\frac{1}{n^p}}$$

Prve spočteme limitu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)}{\frac{1}{n}}$$

Aplikujeme Heineho, $x_n = \frac{1}{n}$, $x_n \to 0$, $x_n \neq 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Potřebujeme tedy spočítat limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{ex}{2}}{x} = -\frac{e}{2}.$$

Dále z VOLSF

$$\lim_{x\to 0} \frac{|f(x)|^p}{x} = \frac{e^p}{2^p}.$$

Tedy platí i

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{b_n} = \frac{e^p}{2^p}.$$

Tedy $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konverguje právě tehdy, když konverguje $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Navíc $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je konvergentní právě tehdy, když $p > 1$. Tedy i $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ je konvergentní právě tehdy, když $p > 1$.

(h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{\frac{1}{n}} - 1 - \frac{1}{n}\right)\left(\arcsin\frac{1}{n} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

Řešení:
Položme $a_n = \left(e^{\frac{1}{n}} - 1 - \frac{1}{n}\right)\left(\arcsin\frac{1}{n} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$. Dále uvažujme posloupnost $x_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$. Zřejmě $x_n \to 0$.
Položme funkci $f(x) = (e^{x^2} - 1 - x^2)(\arcsin x^2 - x)$. Pak platí $f(x_n) = a_n$.
Rozvineme $f(x)$ do Taylora v 0:

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4) - 1 - x^2\right)\left(x^2 + \frac{x^6}{6} + o(x^6) - x\right) \\ &= -\frac{1}{2}x^5 + o(x^5), \quad x \to 0. \end{aligned}$$

Nejsilnější člen je tedy x^5.
Použijeme tedy LSK s $b_n = \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^5 = \frac{1}{n^{5/2}}$ a budeme vyšetřovat absolutní konvergenci.
Počítáme tedy limitu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left|\left(e^{\frac{1}{n}} - 1 - \frac{1}{n}\right)\left(\arcsin\frac{1}{n} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right|}{\frac{1}{n^5}}$$

Prve spočteme limitu

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{n\to\infty} \frac{\left(e^{\frac{1}{n}} - 1 - \frac{1}{n}\right)\left(\arcsin\frac{1}{n} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\frac{1}{n^{5/2}}}$$

Aplikujeme Heineho, $x_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$, $x_n \to 0$, $x_n \neq 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Potřebujeme tedy spočítat limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^5} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{2}x^5 + o(x^5)}{x^5} = -\frac{1}{2}.$$

Odtud i

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(e^{\frac{1}{n}} - 1 - \frac{1}{n}\right)\left(\arcsin\frac{1}{n} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\frac{1}{n^{5/2}}} = -\frac{1}{2}.$$

Z větičky o limitě a absolutní hodně pak platí i

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{b_n} = \frac{1}{2}.$$

Tedy $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konverguje právě tehdy, když konverguje $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Protože $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je konvergentní, tak je konvergentní i $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)$

Řešení:

Položme $a_n = \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)$ Dále uvažujme posloupnost $x_n = \frac{1}{\sqrt[6]{n}}$. Zřejmě $x_n \to 0$.

Položme funkci $f(x) = \sin x^3 - \log(1 + x^2)$. Pak platí $f(x_n) = a_n$.

Rozvineme $f(x)$ do Taylora v 0:

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(x^3 + o(x^3)\right) - \left(x^2 + o(x^2)\right) \\ &= -x^2 + o(x^2), \quad x \to 0. \end{aligned}$$

Nejsilnější člen je tedy x^2.

Použijeme tedy LSK s $b_n = \left(\frac{1}{\sqrt[6]{n}}\right)^2 = \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ a budeme vyšetřovat absolutní konvergenci.

Počítáme tedy limitu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left|\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)\right|}{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}}$$

Prve spočteme limitu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)}{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}}$$

Aplikujeme Heineho, $x_n = \frac{1}{\sqrt[6]{n}}$, $x_n \to 0$, $x_n \neq 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Potřebujeme tedy spočítat limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-x^2 + o(x^2)}{x^2} = -1.$$

Odtud i

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)}{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}} = -1.$$

Z větičky o limitě a absolutní hodně pak platí i

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{b_n} = 1.$$

Tedy $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konverguje právě tehdy, když konverguje $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Protože $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je divergentní, tak je divergentní i $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

(j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} + \ln\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

Řešení:

Položme $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} + \ln\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$. Dále uvažujme posloupnost $x_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$. Zřejmě $x_n \to 0$.

Položme funkci $f(x) = x + \log(\sqrt{1+x^2} - x)$ Pak platí $f(x_n) = a_n$.

Rozvineme $f(x)$ do Taylora v 0:

$$-x + \sqrt{1+x^2} = -x + 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + o(x^4), \quad x \to 0$$

$$\begin{aligned} x + \log(-x + \sqrt{1+x^2}) &= x + (-x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + o(x^4)) - \frac{1}{2}(-x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + o(x^4))^2 \\ &\quad + \frac{1}{3}(-x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + o(x^4)) + o((-x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + o(x^4))^3) \\ &= \frac{1}{6}x^3 + o(x^3), \quad x \to 0. \end{aligned}$$

Nejsilnější člen je tedy x^3.

Použijeme tedy LSK s $b_n = \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^3 = \frac{1}{n^{3/2}}$ a budeme vyšetřovat absolutní konvergenci.

Počítáme tedy limitu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{1}{\sqrt{n}} + \ln\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right|}{\frac{1}{n^{3/2}}}$$

Prve spočteme limitu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n}} + \ln\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\frac{1}{n^{3/2}}}$$

Aplikujeme Heineho, $x_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$, $x_n \to 0$, $x_n \neq 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Potřebujeme tedy spočítat limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{6}x^3 + o(x^3)}{x^3} = \frac{1}{6}.$$

Odtud i

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n}} + \ln\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\frac{1}{n^{3/2}}} = \frac{1}{6}.$$

Z větičky o limitě a absolutní hodně pak platí i

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{b_n} = \frac{1}{6}.$$

Tedy $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konverguje právě tehdy, když konverguje $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Protože $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je konvergentní, tak je konvergentní i $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

2. Dokažte, nebo najděte protipříklad.

(a) Pokud $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, potom konverguje i $\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}+a_{2n})$.
Řešení: Nechť $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ (částečný součet první řady) a $\sigma_n = \sum_{k=1}^{n}(a_{2k-1} + a_{2k})$ (částečný součet druhé řady). Potom platí, že $\sigma_n = s_{2n}$, a tedy posloupnost částečných součtů druhé řady tvoří podposloupnost částečných součtů řady první. A protože libovolná podposloupnost konvergentní posloupnosti konverguje (a to ke stejné limitě), je tvrzení pravdivé.

(b) Pokud $\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}+a_{2n})$ konverguje, potom konverguje i $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
Řešení: Tvrzení není pravdivé. Uvažte posloupnost $a_n = (-1)^n$. Potom první řada $\sum a_n$ má vlastně podobu $-1+1-1+1-1+1$ a osciluje, kdežto druhá $\sum(a_{2n-1}+a_{2n})$ má podobu $0+0+0+0+\dots$ a je zjevně konvergentní.

(c) Pokud $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, potom řada $\sum a_n$ konverguje.
Řešení: Tvrzení není pravdivé. Řada $\sum \frac{1}{n}$ není konvergentní.

(d) Pokud $\sum a_n$ konverguje, potom $a_{n+1} \le a_n$ pro všechna $n \ge 1$.

(e) Pokud $\sum a_n$ konverguje, potom existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $a_{n+1} \le a_n$ pro všechna $n \ge n_0$.
Řešení: Tvrzení jsou zjevně nepravdivá, co třeba řady se zápornými členy $\sum -\frac{1}{n^2}$. Ale i pokud předpokládáme, že $a_n \ge 0$ pro každé přirozené n, přesto najdeme protipříklad. Uvažte posloupnost

$$a_{2n} = \frac{1}{(2n)^2}, \qquad a_{2n+1} = \frac{2}{(2n)^2}.$$

Potom je celkem zřejmé, že $a_{2n+1} \ge a_{2n}$. Přitom řada $\sum a_n$ je konvergentní, neboť $a_{2n} \le a_{2n+1} \le \frac{1}{n^2}$ a řada tedy konverguje podle srovnávacího kritéria.

3. Dokažte nebo najděte protipříklad

(a) Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou absolutně konvergentní. Pak i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ je absolutně konvergentní.
Řešení: Pravda. Jelikož $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je konvergentní, tak $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$. Tedy b_n je omezená - existuje $M > 0$ tak, že $|b_n| \le M$. Pak

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n| = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \cdot |b_n| \le \sum_{n=1}^{\infty} M|a_n|,$$

která konverguje.

(b) Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ konverguje. Nechť navíc $|a_n - b_n| \le c_n$. Pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje právě tehdy, když konverguje $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.
Řešení: Pravda.
Platí

$$0 \le |a_n - b_n| \le c_n.$$

Ze srovnávacího kritéria tedy konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n + (-b_n)|$, tedy i $\sum_{n=1}^{\infty} a_n + (-b_n)$.
Pak ale buď obě řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergují nebo obě divergují. Kdyby jedna konvergovala a druhá divergovala, tak by jejich součet také musel být divergentní.

(c) Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje a b_n je omezená posloupnost. Pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konverguje.
Řešení: Nepravda. Protipříklad: $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$, $b_n = (-1)^n$.

4. Najděte posloupnost a_n, pro niž $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ a pro každé $\alpha \geq 1$ je

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^{\alpha} = \infty.$$

Řešení: $a_n = \frac{1}{\ln n}$

5. Najděte posloupnosti a_n a b_n takové, že $a_n \geq b_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentní a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je divergentní.
Řešení: $a_n = 0$, $b_n = -\frac{1}{n}$.
6. Najděte posloupnosti a_n a b_n takové, že $|a_n| \geq |b_n|$ a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentní a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je divergentní.
Řešení: $a_n = (-1)^n \frac{1}{n}$, $b_n = \frac{1}{n}$.
7. Najděte konvergentní řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a divergentní řadu $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ tak, že $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$.
Řešení: Nechť $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, $b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$.
Pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje podle Leibnize, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverguje, protože jde o součet konvergentní a divergentní řady. Navíc

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} = 1.$$

8. Najděte posloupnosti a_n a b_n tak, že $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ je divergentní, ale přitom a_n a b_n splňují vždy dvě ze tří následujících podmínek:
   (a) $a_n = (-1)^n$,
   (b) $b_{n+1} \leq b_n$,
   (c) $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$.

   Řešení:

   (a) $a_n = 1$, $b_n = \frac{1}{n}$
   (b) $b_n = \frac{1}{n}$ pro lichá n, a $b_n = \frac{1}{n^2}$ pro sudá n. Tato řada je divergentní, protože součet konvergentní $\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{n}$ a divergentní řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ je divergentní
   (c) $b_n = 1$