Řešení. Řada má kladné členy. Pro velké hodnoty $n \in \mathbb{N}$ je ve výrazu $n^3 + 1$ člen 1 zanedbatelný, a proto můžeme očekávat, že se zadaná řada bude chovat podobně jako řada s členy $\frac{n^2}{n^3} = \frac{1}{n}$. Pro $n \in \mathbb{N}$ položme $a_n = \frac{n^2}{n^3+1}$ a $b_n = \frac{1}{n}$. Platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^2}{n^3+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n^3}} = 1.$$

Podle limitního srovnávacího kritéria tedy dostáváme, že zadaná řada konverguje právě tehdy, když konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Tato řada diverguje podle Příkladu 3.1.17, a tedy diverguje i zadaná řada. ♣

3.9.3. Příklad. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$.

Řešení. Pomocí Příkladu 2.2.48 dostaneme

$$\lim \sqrt[n]{\frac{n^2}{2^n}} = \frac{1}{2} \lim \sqrt[n]{n} \cdot \lim \sqrt[n]{n} = \frac{1}{2}.$$

Protože $\frac{1}{2} < 1$, Zadaná řada konverguje podle Cauchyova odmocninového kritéria. ♣

3.9.4. Příklad. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ v závislosti na parametru $\alpha \in \mathbb{R}$.

Řešení. Řada má kladné členy pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$n^{\alpha}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \frac{n^{\alpha}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}.$$

Pro $n \in \mathbb{N}$ položme

$$a_n = \frac{n^{\alpha}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}, \quad b_n = \frac{n^{\alpha}}{\sqrt{n}} = n^{\alpha - \frac{1}{2}}.$$

Platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^{\alpha}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}}{\frac{n^{\alpha}}{\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} = \frac{1}{2}.$$

Podle limitního srovnávacího kritéria zadaná řada konverguje právě tehdy, když konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha - \frac{1}{2}}$. Ta podle Věty 3.2.18 konverguje právě tehdy, když $\alpha - \frac{1}{2} < -1$, neboli právě tehdy, když $\alpha < -\frac{1}{2}$. ♣

3.9.5. Příklad. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^2 n}$.

Řešení. Posloupnost $\{\frac{1}{n \log^2 n}\}_{n=2}^{\infty}$ je klesající a má kladné členy. Podle kondenzačního kritéria zadaná řada konverguje právě tehdy, když konverguje řada

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k \frac{1}{2^k \log^2(2^k)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 \log^2 2}.$$

$$\sum \underbrace{\frac{\sin\frac{1}{\sqrt{n}}}{\arctan(n^2)} \cdot \arctan\left(\frac{1}{n+1}\right)}_{a_n \geq 0}$$

LSK s $\quad b_n = \dfrac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{\pi}{2}} \cdot \dfrac{1}{n} = \dfrac{2}{\pi} \cdot \dfrac{1}{n\sqrt{n}} = \underbrace{\dfrac{2}{\pi} \dfrac{1}{n^{3/2}}}_{\geq 0} \qquad \sum \dfrac{1}{n^{3/2}}$ K

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} \cdot \frac{\arctan\left(\frac{1}{n+1}\right)}{\frac{1}{n}} \cdot \frac{\frac{2}{\pi}}{\arctan n^2} = 1 \in (0,\infty)$$

$\sum a_n$ K $\iff \sum b_n$ K

Závěr: $\sum a_n$ K

Výpočty

- Heine $x_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0 \quad x_n \neq 0$

  $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

  $\Big\} \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = 1$

- Heine $x_n = n^2 \to \infty \quad x_n \neq \infty$

  $\lim\limits_{x\to\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$

  $\Big\} \lim\limits_{n\to\infty} \arctan n^2 = \frac{\pi}{2}$

- Heine $x_n = n \to \infty \quad x_n \neq \infty$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\arctan\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\arctan\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x+1}} \cdot \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x+1}} \overset{AL}{=} 1 \cdot 1$$

VOLSF $\quad f = \dfrac{\arctan y}{y} \qquad \lim\limits_{y\to 0} f = 1 \qquad \frac{1}{x+1} \neq 0$ na $P(\infty, 1)$

$g = \dfrac{1}{x+1} \qquad \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x+1} = 0$

$$\Big\} \lim_{n\to\infty} \frac{\arctan\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = 1$$