



1. cvičení – Řady - NP, Cauchy, d'Alembert

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Příklady

1. (a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$$

Řešení: Užijeme podílové kritérium.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{2 \cdot 2^n} \frac{2^n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \frac{n^2 + 2n + 1}{n^2} = \frac{1}{2}.$$

$1/2 < 1$, tedy řada konverguje.

(b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n}{2^{2n} + 3^{2n}}$$

Řešení: Použijeme odmocninové kritérium

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{6^n}{2^{2n} + 3^{2n}}} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{6}{\sqrt[n]{4^n + 9^n}} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{6}{\sqrt[n]{9^n}} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} < 1,$$

tedy řada konverguje.

(Pozn.: lze použít i verzi s limitou místo limsup. Pak by bylo potřeba hledat dva policajty místo jednoho.)

(c)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$$

Řešení: Použijeme podílové kritérium.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{((n+1)!)^2}{2^{(n+1)^2}} \frac{2^{n^2}}{(n!)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{2^{2n+1}} = 0.$$

Řada konverguje.

(d)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2 + (-1)^n}{7} \right)^n$$

Použijeme odmocninové kritérium. Je

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2 + (-1)^n}{7} \right)^n} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + (-1)^n}{7} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{7} = \frac{3}{7} < 1,$$

řada tedy konverguje. Limes superior je nutno použít, protože limita by neexistovala, zato limes superior existovat musí.

(e)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^7}{2^n + 3^n}$$

Řešení: Použijeme podílové kritérium. Máme

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+1)^7}{2^{n+1}+3^{n+1}}}{\frac{n^7}{2^n+3^n}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^7}{n^7} \cdot \frac{3^n}{3^{n+1}} \cdot \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1}{\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} + 1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^7 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1}{\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} + 1} = \frac{1}{3} < 1. \end{aligned}$$

Řada konverguje.

(f)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \binom{2n}{n} \frac{1}{5^n}$$

Řešení: $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!n!}$ Podílové kritérium.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+2)!n!5^n}{(n+1)!(n+1)!(2n)!5^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)(n+1)} \frac{1}{5} = 4 \cdot \frac{1}{5} < 1.$$

Tedy řada konverguje.

(g)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 + \cos n}{2 + \cos n} \right)^n$$

Řešení: Odmocninové kritérium, verze (a). Máme

$$\frac{1 + \cos n}{2 + \cos n} \leq \frac{2}{3}$$

Ověření nerovnosti:

$$\begin{aligned} \frac{1 + \cos n}{2 + \cos n} &\leq \frac{2}{3} \\ 3 + 3 \cos n &\leq 4 + 2 \cos n \\ \cos n &\leq 1. \end{aligned}$$

Našli jsme tedy $q < 1$, které omezuje posloupnost $a_n \forall n$, tedy řada konverguje.

(h)

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^{n(n-1)}$$

Řešení:

Použijeme odmocninové kritérium

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n-1}{n+1} \right)^{n(n-1)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^{n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-2}{n+1} \right)^{n+1-2} = \frac{1}{e^2} < 1,$$

tedy řada konverguje.

(i)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 1}{2^n - 1}$$

Řešení: Vyšetříme pomocí podílového kritéria:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2 + 1}{n^2 + 1} \cdot \frac{2^n - 1}{2^{n+1} - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2n + 2}{n^2 + 1} \cdot \frac{1 - 1/2^n}{2 - 1/2^n} = \frac{1}{2} < 1,$$

tedy řada konverguje.

(j)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}$$

Řešení:

Řada diverguje, neboť nesplňuje nutnou podmínku konvergence:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} \neq 0.$$

(k)

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n^2 - 1}{n^2} \right)^{(n-1)n(n+1)}$$

Řešení: Použijeme odmocninové kritérium

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n^2 - 1}{n^2} \right)^{(n-1)n(n+1)}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-1}{n^2} \right)^{n^2-1} \\ &\stackrel{VOAL}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-1}{n^2} \right)^{n^2} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-1}{n^2} \right)^{-1} = \frac{1}{e} \cdot 1 < 1, \end{aligned}$$

tedy řada konverguje.

(l)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$$

Řešení:

Otestujeme nejprve nutnou podmínku konvergence. Použijeme větu a převedeme n-tou odmocninu na podíl

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)n^n}{(n+1)^n(n+1)} = \frac{1}{e} \neq 0,$$

tedy řada diverguje.

2. Vyšetřete konvergenci následujících řad, $x \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^4 x^k$$

Řešení:

Pro $|x| < 1$ konverguje absolutně podle podílového kritéria, neboť

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^4 \cdot |x|^{n+1}}{n^4 \cdot |x|^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^4}{n^4} \cdot |x| = |x| < 1.$$

Pokud $|x| \geq 1$, řada diverguje, neboť $\lim n^4 |x|^n = +\infty$, a proto není možné, aby $\lim n^4 x^n = 0$. (Pozor při počítání limity pro $x < 0$, vyjde, že neexistuje.)

Tedy není splněna nutná podmínka konvergence.

Zkouškové příklady

3. Vyšetřete konvergenci následujících řad:

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n^{100}}{2^n}$

Řešení: Vyšetříme absolutní konvergenci podílovým kritériem:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+1)^{100}}{2^{n+1}}}{\frac{n^{100}}{2^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{100} = \frac{1}{2} < 1.$$

Řada tedy konverguje absolutně a tedy konverguje.

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^{(n^2)}}{(n+1)^{n^2+1}}$

Řešení: Vyšetříme řadu za pomoci Cauchyho kritéria:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n^{(n^2)}}{(n+1)^{n^2+1}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{(n+1)^{n+\frac{1}{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n \cdot \frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{n}}} \stackrel{VOAL}{=} \frac{1}{e} \cdot 1 < 1.$$

Tedy řada konverguje.

Zdůvodnění limit:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n} \right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n} = \frac{1}{e}.$$

Pro druhou limitu

$$(n+1)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{n+1}$$

najdeme dva strážníky

$$1 \leftarrow \sqrt[n]{n} \leq \sqrt[n]{n+1} \leq \sqrt[n]{2n} = \sqrt[n]{2} \sqrt[n]{n} \rightarrow 1 \cdot 1.$$

(c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\ln(2^{2^n} + 1)}{\ln(2^{4^n} + 1)}$

Řešení: Vyšetříme řadu za pomoci podílového kritéria:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\ln(2^{2^{n+1}} + 1)}{\ln(2^{4^{n+1}} + 1)}}{\frac{\ln(2^{2^n} + 1)}{\ln(2^{4^n} + 1)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(2^{2^{n+1}} + 1)}{\ln(2^{2^n} + 1)} \cdot \frac{\ln(2^{4^n} + 1)}{\ln(2^{4^{n+1}} + 1)}$$

Vytkneme nejrychlejší člen a použijeme vzorce pro logaritmus:

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(2^{2^{n+1}} \left(1 + \frac{1}{2^{2^{n+1}}} \right) \right)}{\ln \left(2^{2^n} \left(1 + \frac{1}{2^{2^n}} \right) \right)} \cdot \frac{\ln \left(2^{4^n} \left(1 + \frac{1}{2^{4^n}} \right) \right)}{\ln \left(2^{4^{n+1}} \left(1 + \frac{1}{2^{4^{n+1}}} \right) \right)} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} \ln 2 + \ln \left(1 + \frac{1}{2^{2^{n+1}}} \right)}{2^n \ln 2 + \ln \left(1 + \frac{1}{2^{2^n}} \right)} \cdot \frac{4^n \ln 2 + \ln \left(1 + \frac{1}{2^{4^n}} \right)}{4^{n+1} \ln 2 + \ln \left(1 + \frac{1}{2^{4^{n+1}}} \right)} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \ln 2 + \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{2^{2^{n+1}}} \right)}{2^n}}{\ln 2 + \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{2^{2^n}} \right)}{2^n}} \cdot \frac{\ln 2 + \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{2^{4^n}} \right)}{4^n}}{4 \ln 2 + \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{2^{4^{n+1}}} \right)}{4^n}} \\
&\stackrel{V_{OAL}}{=} \frac{2 \ln 2 + 0}{\ln 2 + 0} \cdot \frac{\ln 2 + 0}{4 \ln 2 + 0} = \frac{1}{2} < 1,
\end{aligned}$$

tedy řada konverguje.

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{2^n + 1} z^n, \quad z \in \mathbb{R}.$

Řešení: Pro $z = 0$ jsou všechny členy řady nulové, tedy řada konverguje.

Pro $z \neq 0$ vyšetříme absolutní konvergenci podílovým kritériem:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2^{n+1}}{2^{n+1}+1} |z|^{n+1}}{\frac{2^n}{2^n+1} |z|^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} |z| \frac{2 \cdot (2^n + 1)}{2^{n+1} + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2|z| \frac{1 + \frac{1}{2^n}}{2 + \frac{1}{2^n}} \stackrel{AL}{=} |z|.$$

Zatím máme, že řada konverguje pro $|z| < 1$.

Jestliže $|z| > 1$, tak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1$$

a tedy není splněna nutná podmínka konvergence pro řadu $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

(Tato úvaha se objevuje v důkazu d'Alembertova kritéria <https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~pick/analyza.pdf>).

Pak ale není splněna nutná podmínka ani pro řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a tedy řada diverguje.

Výpočet nutné podmínky lze udělat i přímo. Pro $z > 1$ máme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{2^n + 1} z^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + 2^{-n}} z^n = \infty$$

Pro $z < -1$ je pro $n = 2k$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2^{2k}}{2^{2k} + 1} z^{2k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + 2^{-2k}} (z^2)^k = \infty$$

a pro lichá $n = 2k + 1$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k+1} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2^{2k+1}}{2^{2k+1} + 1} z^{2k+1} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + 2^{-2k-1}} z (z^2)^k = -\infty$$

Tedy není splněna NP.

Zbývá vyšetřit body $z = 1$, $z = -1$. Pro $z = 1$ máme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{2^n + 1},$$

která ale nesplňuje nutnou podmínku konvergence.

Pro $z = -1$ máme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{2^n + 1} (-1)^n,$$

která též nesplňuje nutnou podmínku konvergence.

Závěr: Řada konverguje právě tehdy, když $z \in (-1, 1)$.