



25. cvičení – Globální extrémy 2

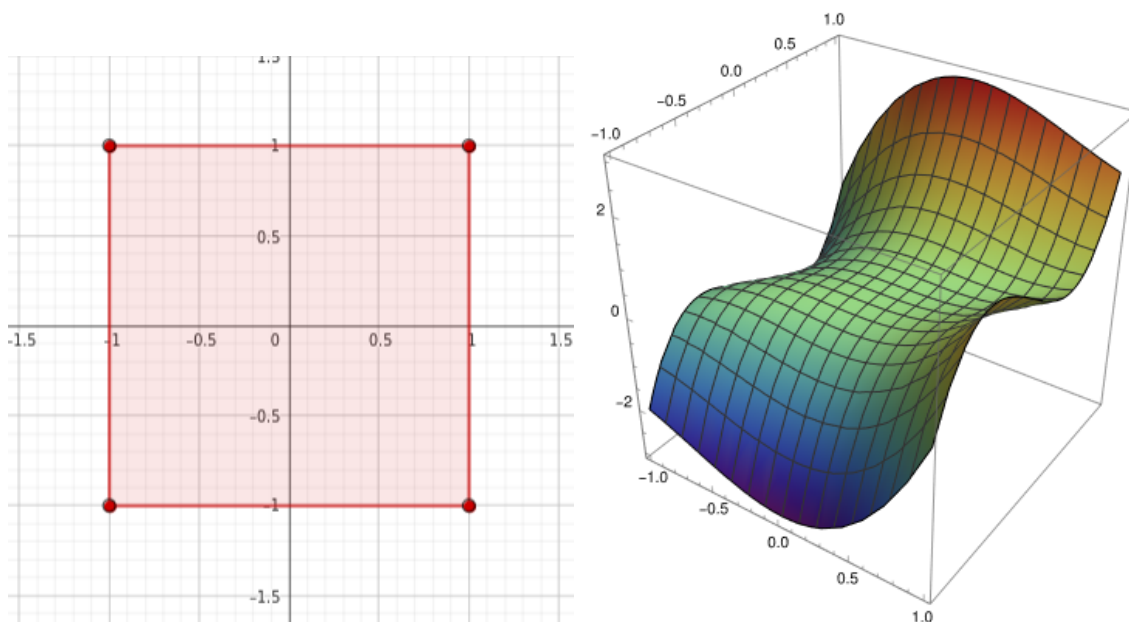
<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

1. Najděte extrémy funkcí na množině

(a) $f(x, y) = x^3 - 2x^2y + 3y^3$ na $M = [-1; 1]^2$

Řešení: Příklad máme z <https://matematika.cuni.cz/dl/ikalkulus/KAP17.pdf>

- Množina M je čtverec s vrcholy $(-1, -1)$, $(1, -1)$, $(1, 1)$ a $(-1, 1)$. Funkce $f(x, y)$ je spojitá funkce (polynom). Množina M (v $\mathbb{R}^2$) je uzavřená (součin dvou uzavřených intervalů) a omezená, tedy je kompaktní. Tedy f na M nabývá extrémů.



- Nejprve budeme vyšetřovat extrémy na množině $(-1, 1) \times (-1, 1)$. Parciální derivace:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= 3x^2 - 4xy, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= -2x^2 + 9y^2.\end{aligned}$$

Rovnice položíme rovny 0 a najdeme podezřelé body. Vyjde bod $(0, 0)$. Máme tedy první podezřelý bod.

- Nyní vyšetříme hranici. Tu lze popsat 4 úsečkami. Jejich parametrizaci dosadíme do f .
 - $y = -1$, $x \in (-1, 1)$. Máme

$$g(x) = f(x, -1) = x^3 + 2x^2 - 3.$$

Jde o funkci jedné proměnné, její extrémy najdeme pomocí derivace:

$$g'(x) = 3x^2 + 4x = x(3x + 4)$$

Nulové derivace jsou pro $x = 0$ a $x = -\frac{4}{3}$. Druhý bod neleží v M . Dostáváme tedy podezřelý bod $(0, -1)$.

ii. $y = 1, x \in (-1, 1)$. Máme

$$g(x) = f(x, 1) = x^3 - 2x^2 + 3.$$

Jde o funkci jedné proměnné, její extrémy najdeme pomocí derivace:

$$g'(x) = 3x^2 - 4x = x(3x - 4)$$

Nulové derivace jsou pro $x = 0$ a $x = \frac{4}{3}$. Druhý bod neleží v M . Dostáváme tedy podezřelý bod $(0, 1)$.

iii. $x = -1, y \in (-1, 1)$. Máme

$$g(y) = f(-1, y) = 3y^3 - 2y - 1.$$

Jde o funkci jedné proměnné, její extrémy najdeme pomocí derivace:

$$g'(y) = 9y^2 - 2$$

Nulové derivace jsou pro $y = \pm\frac{1}{3}\sqrt{2}$. Dostáváme tedy podezřelé body $(-1, \frac{1}{3}\sqrt{2})$. a $(-1, -\frac{1}{3}\sqrt{2})$.

iv. $x = 1, y \in (-1, 1)$. Máme

$$g(y) = f(1, y) = 3y^3 - 2y + 1.$$

Jde o funkci jedné proměnné, její extrémy najdeme pomocí derivace:

$$g'(y) = 9y^2 - 2$$

Nulové derivace jsou pro $y = \pm\frac{1}{3}\sqrt{2}$. Dostáváme tedy podezřelé body $(1, \frac{1}{3}\sqrt{2})$. a $(1, -\frac{1}{3}\sqrt{2})$.

- Přidáme vrcholy čtverce. Tedy podezřelé body: $(-1, -1)$, $(1, -1)$, $(1, 1)$ a $(-1, 1)$.
- Porovnáme hodnoty ve všech podezřelých bodech:

$$f(0, 0) = 0,$$

$$f(-1, 1) = 0,$$

$$f(1, 1) = 2,$$

$$f(1, -1) = 0,$$

$$f(-1, -1) = -2,$$

$$f(0, 1) = 3,$$

$$f(0, -1) = -3,$$

$$f(-1, \frac{1}{3}\sqrt{2}) = -1 - \frac{4}{9}\sqrt{2}$$

$$f(-1, -\frac{1}{3}\sqrt{2}) = \frac{4}{9}\sqrt{2} - 1$$

$$f(1, \frac{1}{3}\sqrt{2}) = 1 - \frac{4}{9}\sqrt{2}$$

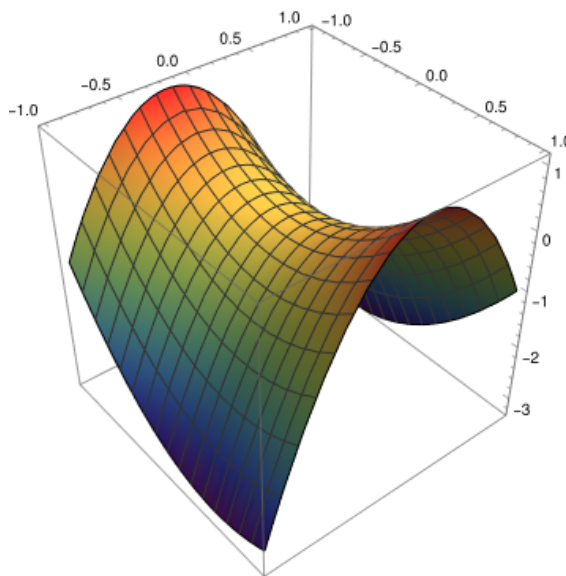
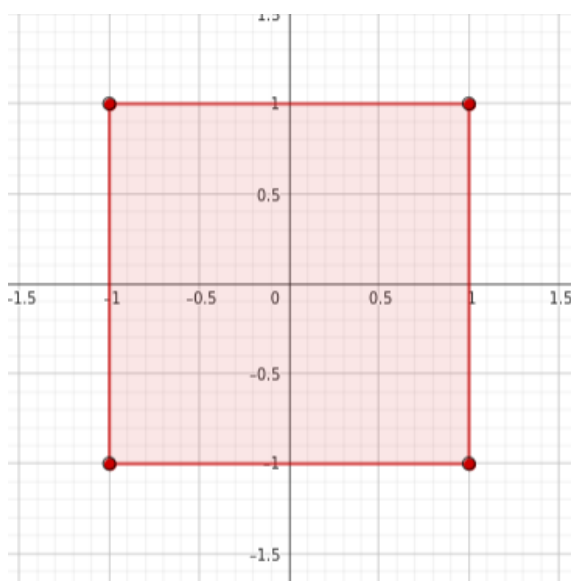
$$f(1, -\frac{1}{3}\sqrt{2}) = 1 + \frac{4}{9}\sqrt{2}$$

- Závěr: globální maximum je v bodě $(0, 1)$, $f(0, 1) = 3$ a minimum v $(0, -1)$, $f(0, -1) = -3$.

(b) $f(x, y) = x^2 - 3y^2 + xy$ na $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$

Řešení: Příklad máme z Petr Holický, Ondřej F.K. Kalenda : Metody řešení vybraných úloh z matematické analýzy pro 2. - 4. semestr

- Množina M je čtverec s vrcholy $(-1, -1)$, $(1, -1)$, $(1, 1)$ a $(-1, 1)$. Funkce $f(x, y)$ je spojitá funkce (polynom). Množina M (v $\mathbb{R}^2$) je uzavřená (součin dvou uzavřených intervalů) a omezená, tedy je kompaktní. Tedy f na M nabývá extrémů.



- Nejprve budeme vyšetřovat extrémy na množině $(-1, 1) \times (-1, 1)$. Parciální derivace:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= 2x + y, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= -6y + x\end{aligned}$$

Rovnice položíme rovny 0 a najdeme podezřelé body. Vyjde bod $(0, 0)$. Máme tedy první podezřelý bod.

- Nyní vyšetříme hranici. Tu lze popsat 4 úsečkami. Jejich parametrizaci dosadíme do f .

i. $y = -1$, $x \in (-1, 1)$. Máme

$$g(x) = f(x, -1) = x^2 - x - 3$$

Jde o funkci jedné proměnné, její extrémy najdeme pomocí derivace:

$$g'(x) = 2x - 1$$

Nulové derivace jsou pro $x = 0$ a $x = \frac{1}{2}$. Dostáváme tedy podezřelý bod $(\frac{1}{2}, -1)$.

ii. $y = 1, x \in (-1, 1)$. Máme

$$g(x) = f(x, 1) = x^2 + x - 3.$$

Jde o funkci jedné proměnné, její extrémy najdeme pomocí derivace:

$$g'(x) = 2x + 1$$

Nulové derivace jsou pro $x = -\frac{1}{2}$. Dostáváme tedy podezřelý bod $(-\frac{1}{2}, 1)$.

iii. $x = -1, y \in (-1, 1)$. Máme

$$g(y) = f(-1, y) = 1 - y - 3y^2$$

Jde o funkci jedné proměnné, její extrémy najdeme pomocí derivace:

$$g'(y) = -1 - 6y$$

Nulové derivace jsou pro $y = -\frac{1}{6}$. Dostáváme tedy podezřelé body $(-1, -\frac{1}{6})$.

iv. $x = 1, y \in (-1, 1)$. Máme

$$g(y) = f(1, y) = 1 + y - 3y^2$$

Jde o funkci jedné proměnné, její extrémy najdeme pomocí derivace:

$$g'(y) = 1 - 6y$$

Nulové derivace jsou pro $y = \frac{1}{6}$. Dostáváme tedy podezřelé body $(1, \frac{1}{6})$.

- Přidáme vrcholy čtverce. Tedy podezřelé body: $(-1, -1)$, $(1, -1)$, $(1, 1)$ a $(-1, 1)$.
- Porovnáme hodnoty ve všech podezřelých bodech:

$$f(0, 0) = 0,$$

$$f(-1, 1) = -3,$$

$$f(1, 1) = -1,$$

$$f(1, -1) = -3,$$

$$f(-1, -1) = -1,$$

$$f(\frac{1}{2}, -1) = -\frac{13}{4},$$

$$f(-\frac{1}{2}, 1) = -\frac{13}{4},$$

$$f(-1, -\frac{1}{6}) = \frac{13}{12},$$

$$f(1, \frac{1}{6}) = \frac{13}{12},$$

- Závěr: globální maximum je v bodech $(1, \frac{1}{6})$ a $(-1, -\frac{1}{6})$ a má hodnotu $13/12$. Minimum v $(-\frac{1}{2}, 1)$ a $(\frac{1}{2}, -1)$ a má hodnotu $-13/4$.

(c) $f(x, y) = x + y$ na $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + y^2 \leq 1\}$

Řešení: Příklad máme z Petr Holický, Ondřej F.K. Kalenda : Metody řešení vybraných úloh z matematické analýzy pro 2. - 4. semestr

- Množina M je elipsa o středu v počátku.
Funkce $f(x, y)$ je spojitá funkce (polynom). Množina M (v $\mathbb{R}^2$) je uzavřená:
Jde o vzor uzavřené množiny A při spojitém zobrazení g , konkrétně $A = (-\infty, 1]$, $g(x, y) = 4x^2 + y^2$, pak

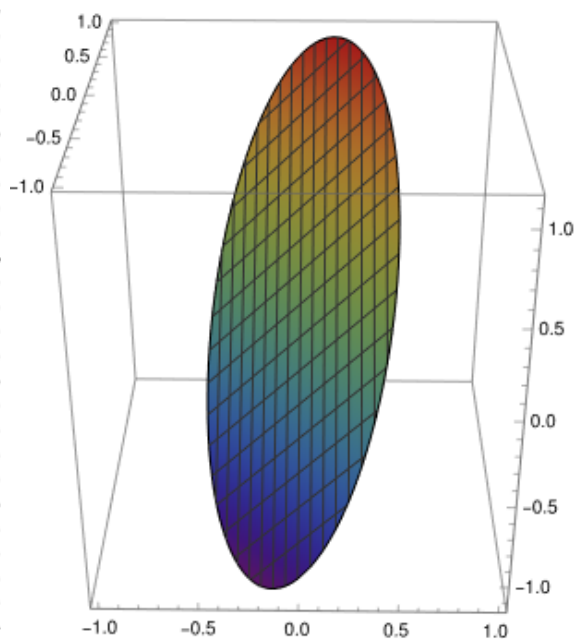
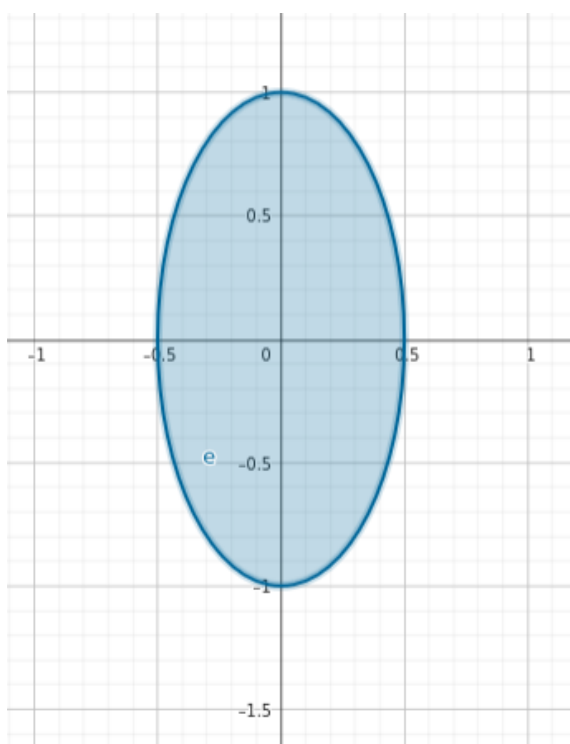
$$M = g^{-1}((-\infty, 1]).$$

Zároveň je M omezená:

$$x^2 + y^2 \leq 4x^2 + y^2 \leq 1.$$

Tedy je M kompaktní.

Tedy f na M nabývá extrémů.



- Nejprve budeme vyšetřovat extrémy na množině $4x^2 + y^2 < 1$. Parciální derivace:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 1, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 1 \end{aligned}$$

Rovnice tedy nejsou nikde nulové a na vnitřku M nemáme žádný podezřelý bod.

- Nyní vyšetříme hranici. To jsou body splňující $4x^2 + y^2 = 1$.
Hranici popíšeme pomocí polárních souřadnic:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2} \cos t, \\ y &= \sin t, \quad t \in [0, 2\pi) \end{aligned}$$

Pak máme

$$4 \cdot \left(\frac{1}{2} \cos t\right)^2 + \sin^2 t = 1$$

Dosadíme do funkce f . Tedy

$$g(t) = f\left(\frac{1}{2} \cos t, \sin t\right) = \frac{1}{2} \cos t + \sin t.$$

Zderivujeme, abychom našli extrémy.

$$g'(t) = -\frac{1}{2} \sin t + \cos t.$$

Nulové body:

$$\sin t = 2 \cos t.$$

Protože $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$, tak řešením je: $\sin t = \frac{2}{\sqrt{5}}$ a $\cos t = \frac{1}{\sqrt{5}}$ nebo $\sin t = -\frac{2}{\sqrt{5}}$ a $\cos t = -\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Celkem tedy dostáváme podezřelé body $((x, y))$: $(\frac{1}{2\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})$ a $(-\frac{1}{2\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}})$.

- Přidáme „hranici hranice“, tedy bod $t = 0, (\frac{1}{2}, 0)$
- Porovnáme hodnoty ve všech podezřelých bodech:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{2\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right) &= \frac{\sqrt{5}}{2} \\ f\left(-\frac{1}{2\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right) &= -\frac{\sqrt{5}}{2} \\ f\left(\frac{1}{2}, 0\right) &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

- Závěr: globální maximum je v bodě $(\frac{1}{2\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})$ a má hodnotu $\frac{\sqrt{5}}{2}$, minimum je v bodě $(-\frac{1}{2\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}})$ a má hodnotu $-\frac{\sqrt{5}}{2}$

(d) $f(x, y) = x^2 - 3y^2 - x + 18y + 4$ na $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq y \leq 4\}$

Řešení: Příklad máme z http://www.math.muni.cz/~zemanekp/files/SRPzMAII_FRMU.pdf

- Množina M je trojúhelník s vrcholy $(0, 0)$, $(4, 4)$ a $(0, 4)$. Funkce $f(x, y)$ je spojitá funkce (polynom). Množina M (v $\mathbb{R}^2$) je uzavřená: jde o průnik tří polorovin, které jsou uzavřené množiny. Konkrétně:

$$\begin{aligned} M_1 &= \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\} = g_1^{-1}([0, \infty)), & g_1(x, y) &= x \\ M_2 &= \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : y \leq 4\} = g_2^{-1}((-\infty, 4]), & g_2(x, y) &= y \end{aligned}$$

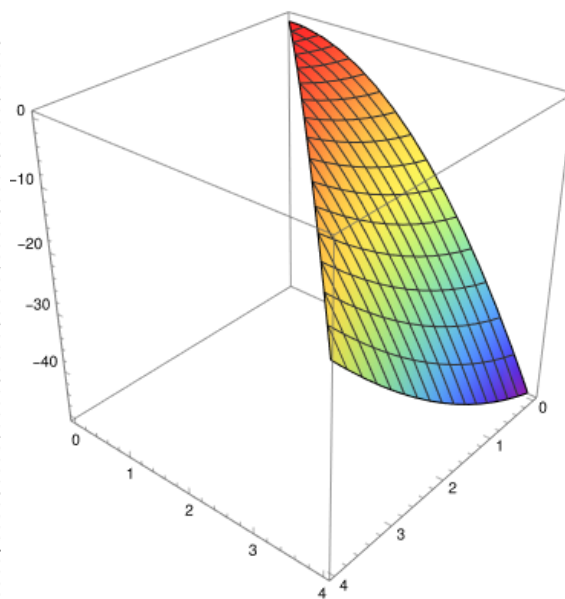
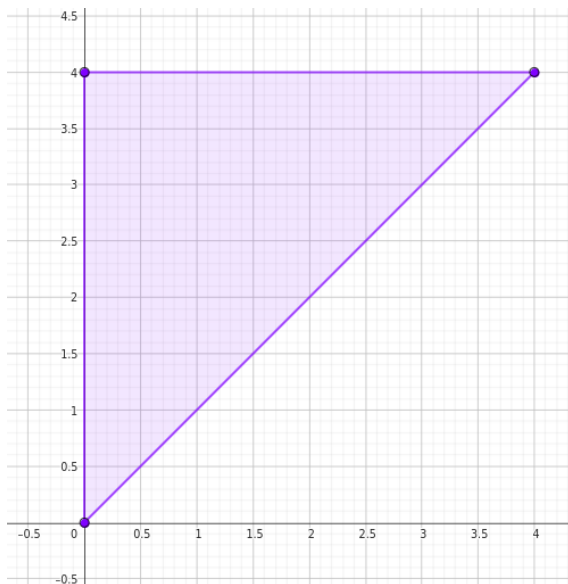
a

$$M_3 = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x \leq y\} = g_3^{-1}([0, \infty)), \quad g_3(x, y) = y - x$$

Tedy $M = M_1 \cap M_2 \cap M_3$. Průnik 3 uzavřených množin je uzavřená množina. Množina je zároveň omezená: $0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 4$.

Tedy je M kompaktní.

Tedy f na M nabývá extrémů.



- Nejprve budeme vyšetřovat extrémy na vnitřku množiny. Parciální derivace:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= 2x - 1, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= -6y + 18\end{aligned}$$

Rovnice položíme rovny 0 a najdeme podezřelé body. Vyjde bod $(\frac{1}{2}, 3)$. Máme tedy první podezřelý bod.

- Nyní vyšetříme hranici. Tu lze popsat 3 úsečkami. Jejich parametrizaci dosadíme do f .

- $x = 0, y \in (0, 4)$. Máme

$$g(y) = f(0, y) = -3y^2 + 18y + 4$$

Jde o funkci jedné proměnné, její extrémy najdeme pomocí derivace:

$$g'(y) = -6y + 18$$

Nulové derivace jsou pro $y = 3$. Dostáváme tedy podezřelý bod $(0, 3)$.

- $y = 4, x \in (0, 4)$. Máme

$$g(x) = f(x, 4) = x^2 - x + 28.$$

Jde o funkci jedné proměnné, její extrémy najdeme pomocí derivace:

$$g'(x) = 2x - 1$$

Nulové derivace jsou pro $x = \frac{1}{2}$. Dostáváme tedy podezřelý bod $(\frac{1}{2}, 4)$.

iii. $y = x$, $x \in (0, 4)$. Máme

$$g(x) = f(x, x) = -2x^2 + 17x + 4$$

Jde o funkci jedné proměnné, její extrémy najdeme pomocí derivace:

$$g'(x) = -4x + 17$$

Nulové derivace jsou pro $x = 17/4$. Dostáváme tedy podezřelý bod $(17/4, 17/4)$, který ale neleží v M .

- Přidáme vrcholy trojúhelníka. Tedy podezřelé body: $(0, 0)$, $(4, 4)$ a $(0, 4)$.
- Porovnáme hodnoty ve všech podezřelých bodech:

$$f(0, 0) = 4,$$

$$f(4, 4) = 40,$$

$$f(0, 4) = 28,$$

$$f\left(\frac{1}{2}, 3\right) = 123/4,$$

$$f\left(\frac{1}{2}, 4\right) = 111/4,$$

$$f(0, 3) = 31,$$

- Závěr: globální maximum je v bodě $(4, 4)$ a má hodnotu 40. Minimum v $(0, 0)$ a má hodnotu 4.

(e) $f(x, y) = (x - y)^2 + x^2$ na M ,

kde M je čtverec s vrcholy $A = [2, 0]$, $B = [0, 2]$, $C = [-2, 0]$, $D = [0, -2]$

Řešení: Příklad máme z http://www.math.muni.cz/~zemanekp/files/SRPzMAII_FRMU.pdf

- Množina M je čtverec postavený na špičku s vrcholy $(2, 0)$, $(0, 2)$, $(-2, 0)$, a $(0, -2)$.

Funkce $f(x, y)$ je spojitá funkce (polynom). Množina M (v $\mathbb{R}^2$) je uzavřená: jde o průnik dvou uzavřených množin. Konkrétně:

$$M_1 = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x - 2 \leq y \leq x + 2\} = g_1^{-1}([-2, 2]), \quad g_1(x, y) = y - x$$

a

$$M_2 = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : -x - 2 \leq y \leq -x + 2\} = g_2^{-1}([-2, 2]), \quad g_2(x, y) = y + x$$

Tedy $M = M_1 \cap M_2$. Průnik 2 uzavřených množin je uzavřená množina.

Množina je zároveň omezená: $-2 \leq x \leq 2$, $-2 \leq y \leq 2$.

Tedy je M kompaktní.

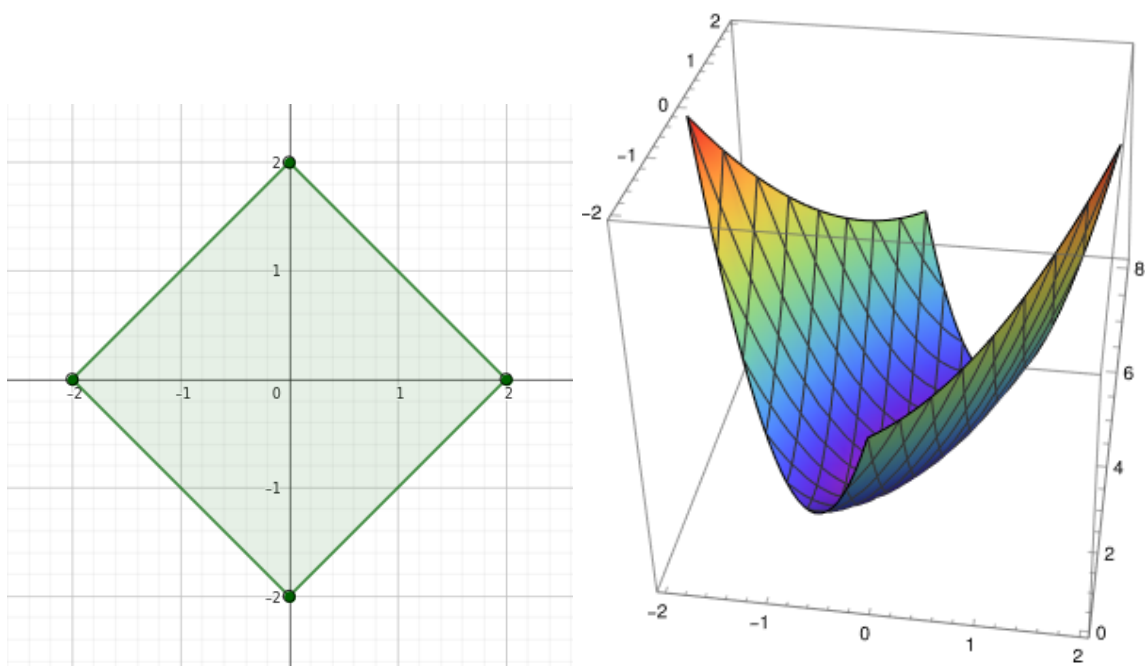
Tedy f na M nabývá extrémů.

- Nejprve budeme vyšetřovat extrémy na vnitřku množiny. Parciální derivace:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x - 2y,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2x - 2y$$

Rovnice položíme rovny 0 a najdeme podezřelé body. Vyjde bod $(0, 0)$. Máme tedy první podezřelý bod.



- Nyní vyšetříme hranici. Tu lze popsat 4 úsečkami. Jejich parametrizaci dosadíme do f .

i. $y = -x + 2, x \in (0, 2)$. Máme

$$g(x) = f(x, -x + 2) = (2x - 2)^2 + x^2$$

Jde o funkci jedné proměnné, její extrémů najdeme pomocí derivace:

$$g'(x) = 10x - 8$$

Nulové derivace jsou pro $x = 4/5$. Dostáváme tedy podezřelý bod $(4/5, 6/5)$.

ii. $y = x + 2, x \in (-2, 0)$. Máme

$$g(x) = f(x, x + 2) = 4 + x^2$$

Jde o funkci jedné proměnné, její extrémů najdeme pomocí derivace:

$$g'(x) = 2x$$

Nulové derivace jsou pro $x = 0$. Tento bod neleží na vnitřku dané úsečky, tedy jej budeme uvažovat až později (jako vrchol čtverce).

iii. $y = -x - 2, x \in (-2, 0)$. Máme

$$g(x) = f(x, -x - 2) = (2x + 2)^2 + x^2$$

Jde o funkci jedné proměnné, její extrémů najdeme pomocí derivace:

$$g'(x) = 10x + 8$$

Nulové derivace jsou pro $x = -4/5$. Dostáváme tedy podezřelý bod $(-4/5, -6/5)$.

iv. $y = x - 2$, $x \in (0, 2)$. Máme

$$g(x) = f(x, x - 2) = 4 + x^2$$

Jde o funkci jedné proměnné, její extrémy najdeme pomocí derivace:

$$g'(x) = 2x$$

Nulové derivace jsou pro $x = 0$. Tento bod neleží na vnitřku dané úsečky, tedy jej budeme uvažovat až později (jako vrchol čtverce).

- Přidáme vrcholy čtverce. Tedy podezřelé body: $(2, 0)$, $(0, 2)$, $(-2, 0)$, a $(0, -2)$.
- Porovnáme hodnoty ve všech podezřelých bodech:

$$f(0, 0) = 0,$$

$$f(2, 0) = 8,$$

$$f(0, 2) = 4,$$

$$f(-2, 0) = 8,$$

$$f(0, -2) = 4,$$

$$f(4/5, 6/5) = 4/5,$$

$$f(-4/5, -6/5) = 4/5,$$

- Závěr: globální maximum je v bodech $(2, 0)$ a $(-2, 0)$ a má hodnotu 8. Minimum v $(0, 0)$ a má hodnotu 0.

(f) $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$ na $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$

Hint: polární souřadnice

Řešení: Příklad máme z <https://www.karlin.mff.cuni.cz/~bouchala/Vyuka/>

- Množina M je kruh o středu v počátku a poloměru 1.
Funkce $f(x, y)$ je spojitá funkce (polynom). Množina M (v $\mathbb{R}^2$) je uzavřená:
Jde o vzor uzavřené množiny A při spojitém zobrazení g , konkrétně $A = (-\infty, 1]$, $g(x, y) = x^2 + y^2$, pak

$$M = g^{-1}((-\infty, 1]).$$

Zároveň je M omezená:

$$x^2 + y^2 \leq x^2 + y^2 \leq 1.$$

Tedy je M kompaktní.

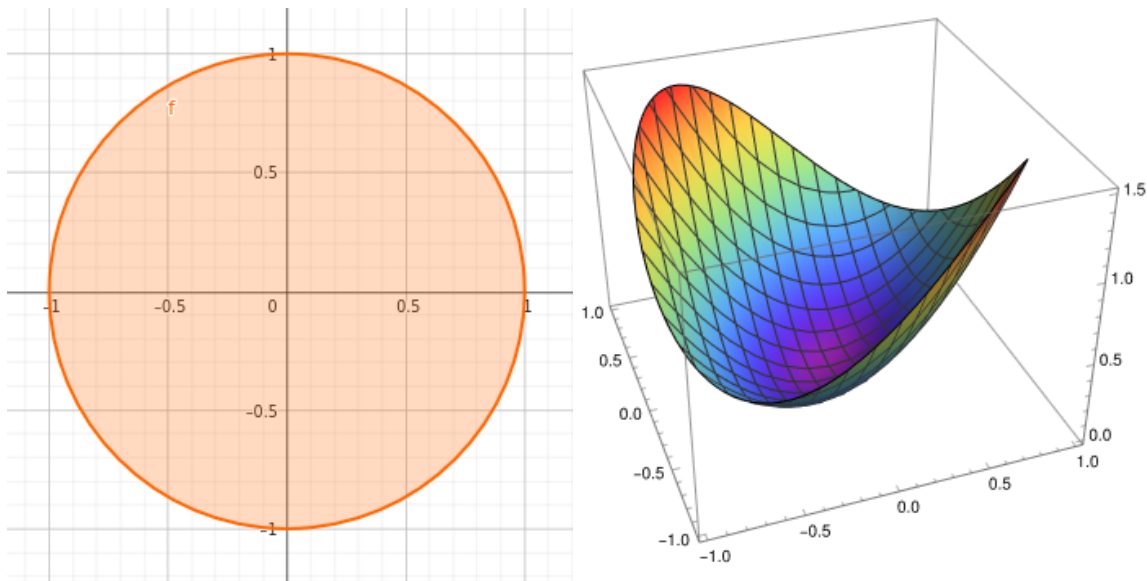
Tedy f na M nabývá extrémů.

- Nejprve budeme vyšetřovat extrémy na množině $x^2 + y^2 < 1$. Parciální derivace:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y - x$$

Řešením je bod $(0, 0)$, máme tedy první podezřelý bod.



- Nyní vyšetříme hranici. To jsou body splňující $x^2 + y^2 = 1$.
Hranici popíšeme pomocí polárních souřadnic:

$$\begin{aligned}x &= \cos t, \\y &= \sin t, \quad t \in [0, 2\pi)\end{aligned}$$

Dosadíme do funkce f . Tedy

$$g(t) = f(\cos t, \sin t) = 1 - \sin t \cos t$$

Zderivujeme, abychom našli extrémy.

$$g'(t) = \sin^2 t - \cos^2 t = -\cos(2t)$$

Nulové body:

$$\cos(2t) = 0.$$

Řešením je: $t = \frac{\pi}{4}, t = \frac{3\pi}{4}, t = \frac{5\pi}{4}, t = \frac{7\pi}{4}$.

Celkem tedy dostáváme podezřelé body $((x, y))$: $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}), (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}), (-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$
a $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$,

- Přidáme „hranici hranice“, tedy bod $t = 0, (1, 0)$.
- Porovnáme hodnoty ve všech podezřelých bodech:

$$\begin{aligned}f(0, 0) &= 0 \\f(1, 0) &= 1 \\f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) &= \frac{1}{2}f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{3}{2} \\f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) &= \frac{1}{2}f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{3}{2}\end{aligned}$$

- Závěr: globální maximum je v bodech $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}), (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$,
minimum je v bodě $(0, 0)$ a má hodnotu 0.

2. Určete maximální možný objem kvádru, jehož hrany jsou rovnoběžné se souřadnými osami, jeden jeho vrchol leží v počátku a diagonálně protilehlý vrchol leží v množině $M = \{[x, y, z], x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, 4x + 2y + z = 2.\}$

Řešení: Uvažujme kvádr A-H, kde $A = [0, 0, 0]$ a $G = [x_0, y_0, z_0] \in M$.

Chceme maximalizovat objem, hledáme tedy extrémy funkce $f(x, y, z) = xyz$. (Mělo by být $|xyz|$, ale my máme $x, y, z \geq 0$).

Množina M je omezená (lze nakreslit, jde o trojúhelník „v rohu místnosti“). Je i uzavřená, tedy kompaktní. Funkce f je navíc spojitá, tedy nabývá extrémů.

Dále máme vazbu $g = 4x + 2y + z - 2$.

Otestujeme Lagrangeovy multiplikátory.

- $\nabla g = (4, 2, 1) \neq 0$
- $\nabla f + \lambda \nabla g = 0$, tedy

$$\begin{aligned}yz + 4\lambda &= 0, \\xz + 2\lambda &= 0, \\xy + \lambda &= 0, \\4x + 2y + z &= 0,\end{aligned}$$

Ze třetí rovnice vyjádříme $\lambda = -xy$. Dosadíme do prvních dvou a získáme novou soustavu rovnic

$$\begin{aligned}yz - 4xy &= 0, \\xz - 2xy &= 0, \\4x + 2y + z &= 0,\end{aligned}$$

Dvakrát druhá rovnice minus první dá

$$\begin{aligned}2xz - yz &= 0 \\z(2x - y) &= 0\end{aligned}$$

Tedy buď $z = 0$ nebo $y = 2x$. První možnost by dala $f(x, y, 0) = 0$, což maximum nebude. Tedy platí $y = 2x$. Dosadíme do soustavy a získáme řešení $x = 0$ (opět nedá maximum) nebo $x = \frac{1}{6}$, tedy $y = \frac{1}{3}$ a $z = \frac{2}{3}$.

Maximum je tedy v bodě $[\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ a má hodnotu $\frac{1}{27}$.

Bonusové příklady

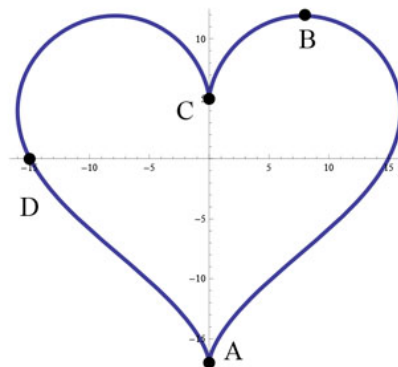
3. Farmář a fařmářka mají 100 m pletiva a rádi by oplotili pozemek pro ovce tak, aby měl co největší plochu. Trvají na tom, že pozemek bude mít tvar obdélníku. Ježto je u řeky, stačí jej oplotit ze 3 stran. Jaké bude zadání za pomoci Lagrangeových multiplikátorů?
- (a) $f(x, y) = xy, g(x, y) = 2x + y - 100$
 - (b) $f(x, y) = 2x + 2y - 100, g(x, y) = xy$
 - (c) $f(x, y) = xy, g(x, y) = x + y - 100$
 - (d) $f(x, y) = x + y, g(x, y) = xy - 100$



Figure 1: <https://www.cbr.com/shaun-the-sheep-best-worst-episodes-imdb/>

Řešení: (a)

4. Ve kterém z bodů A , B , C , D se nachází minimum funkce $f(x, y) = y$ vzhledem ke křivce na obrázku?



Zdroj: <https://www.cpp.edu/conceptests/question-library/mat214.shtml>

Řešení: A