



25. cvičení – Globální extrémy 2

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Teorie

Algoritmus: Extrémy na omezené množině:

1. Je-li množina uzavřená, tak odůvodníme, že **spojitá** funkce na **kompaktu** nabývá extrémy.
2. Extrémy mohou být:
 - (a) na **vnitřku** množiny jen v místech s nulovými derivacemi (jejich typ nevyšetřujeme, pokud na to nejsme přímo tázáni);
 - (b) v bodech vnitřku, kde **neexistuje derivace**;
 - (c) na **hranici**: hraniční křivky (nebo plochy) - obvykle lze dosadit a výraz zjednodušit.
 - (d) na hranici hranice: **krajní body**, vrcholy trojúhelníku atp.
3. Všechny podezřelé body sepišeme a **porovnáme** jejich funkční hodnoty. Vybereme maximum a minimum.

Příklady

1. Najděte extrémy funkcí na množině
 - (a) $f(x, y) = x^3 - 2x^2y + 3y^3$ na $M = [-1; 1]^2$
 - (b) $f(x, y) = x^2 - 3y^2 + xy$ na $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$
 - (c) $f(x, y) = x + y$ na $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + y^2 \leq 1\}$
Hint: zobecněné polární souřadnice
 - (d) $f(x, y) = x^2 - 3y^2 - x + 18y + 4$ na $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq y \leq 4\}$
 - (e) $f(x, y) = (x - y)^2 + x^2$ na M ,
kde M je čtverec s vrcholy $A = [2, 0]$, $B = [0, 2]$, $C = [-2, 0]$, $D = [0, -2]$
 - (f) $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$ na $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$
Hint: polární souřadnice

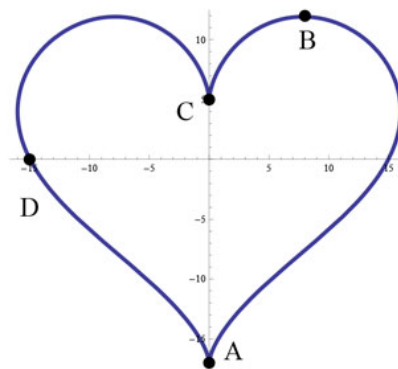
Bonus

2. Určete maximální možný objem kvádra, jehož hrany jsou rovnoběžné se souřadnými osami, jeden jeho vrchol leží v počátku a diagonálně protilehlý vrchol leží v množině $M = \{[x, y, z], x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, 4x + 2y + z = 2\}$
3. Farmář a farmářka mají 100 m pletiva a rádi by oplotili pozemek pro ovce tak, aby měl co největší plochu. Trvají na tom, že pozemek bude mít tvar obdélníku. Ježto je u řeky, stačí jej oplotit ze 3 stran. Jaké bude zadání za pomoci Lagrangeových multiplikátorů?
 - (a) $f(x, y) = xy$, $g(x, y) = 2x + y - 100$
 - (b) $f(x, y) = 2x + 2y - 100$, $g(x, y) = xy$
 - (c) $f(x, y) = xy$, $g(x, y) = x + y - 100$
 - (d) $f(x, y) = x + y$, $g(x, y) = xy - 100$



Figure 1: <https://www.cbr.com/shaun-the-sheep-best-worst-episodes-imdb/>

4. Ve kterém z bodů A , B , C , D se nachází minimum funkce $f(x, y) = y$ vzhledem ke křivce na obrázku?



Zdroj: <https://www.cpp.edu/conceptests/question-library/mat214.shtml>

$$(1c) \ x = \frac{1}{2} \cos t, \ y = \sin t, \ t \in [0, 2\pi), \text{ pak nehlédějte hodnoty } t, \text{ stačí hodnoty } \cos t, \sin t$$