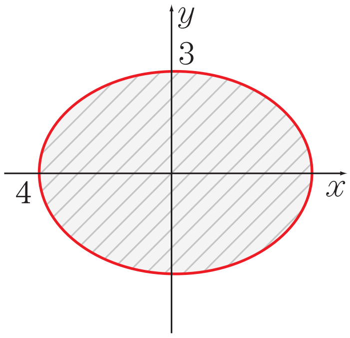
Příklad 6.3.2. Na elipse $9x^2 + 16y^2 \leq 144$ nalezněte globální extrémy funkce $z = f(x, y)$,

$$f(x, y) = 9x^2 - 36x + 16y^2 - 64y.$$

Řešení: Definičním oborem funkce f je $\mathrm{D}_f = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \,|\, 9x^2 + 16y^2 \leq 144\}$.



Obr. 6.3.2

Nalezneme lokální extrémy funkce f,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 18x - 36 = 18(x - 2) = 0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 32y - 64 = 32(y - 2) = 0.$$

Řešením soustavy je bod $A_1 = [2, 2]$. Je nutné ověřit, že bod A_1 leží v D_f, dosazením snadno zjistíme, že A_1 vyhovuje nerovnici elipsy. Sestavíme matici parciálních derivací druhého řádu a určíme hodnoty determinantů D_1, D_2. Obě hodnoty jsou kladné, funkce f má v bodě A_1 ostré lokální minimum.

Sestavíme Lagrangeovu funkci a vyšetříme existenci vázaných extrému na hranici elipsy.

$$\Phi = 9x^2 - 36x + 16y^2 - 64y + \lambda(9x^2 + 16y^2 - 144),$$
$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 18x - 36 + 18\lambda x = 0 \;\Rightarrow\; x = \frac{2}{1 + \lambda},$$
$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = 32y - 64 + 32\lambda y = 0 \;\Rightarrow\; y = \frac{2}{1 + \lambda}.$$

Dosadíme do rovnice vazby $(g(x, y) = 9x^9 + 16y^2 - 144 = 0)$,

$$9\left(\frac{2}{1 + \lambda}\right)^2 + 16\left(\frac{2}{1 + \lambda}\right)^2 = 144 \;\Rightarrow\; \lambda_2 = \tfrac{1}{6},\ \lambda_3 = \tfrac{11}{6}.$$

Pro $\lambda_2 = \frac{1}{6}$ dopočítáme $x_2 = y_2 = \frac{12}{5}$, získali jsme stacionární bod $A_2 = [\frac{12}{5}, \frac{12}{5}]$. Stejně postupujeme i pro hodnotu $\lambda_3 = \frac{11}{6}$, $x_3 = y_3 = -\frac{12}{5}$, tedy $A_3 = [-\frac{12}{5}, -\frac{12}{5}]$.

Sestavíme matici parciálních derivací druhého řádu pru Lagrangeovu funkci Φ a určíme hodnoty příslušných determinantů. V bodě $A_2 = [\frac{12}{5}, \frac{12}{5}]$ má funkce f vázané lokální minimum, v bodě $A_3 = [-\frac{12}{5}, -\frac{12}{5}]$ má funkce f vázané lokální maximum.

Porovnáním funkčních hodnot rozhodneme o existenci globálních extrémů funkce f,

$$f(A_1) = -100 \quad < \quad f(A_2) = -96 \quad < \quad f(A_3) = 384.$$

Funkce f má v bodě $A_1 = [2, 2]$ globální minimum $z = -100$ a v bodě $A_3 = [-\frac{12}{5}, -\frac{12}{5}]$ globální maximum $z = 384$.

Úlohy k samostatnému řešení

1. Určete globální extrémy funkce $f(x, y) = x^2 - y$ na čtverci s vrcholy $[1, 1]$, $[3, 1]$, $[1, 3]$, $[3, 3]$.

2. Určete globální extrémy funkce $f(x, y) = x^2 + y^2$ na trojúhelníku s vrcholy $[0, 0]$, $[2, 0]$, $[0, 1]$.

3. Určete globální extrémy funkce $f(x, y) = 4y$ na kruhu $x^2 + y^2 \leq 1$.

4. Určete globální extrémy funkce $f(x, y) = 3x + 4y + 1$ na kruhu $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 \leq 1$.

5. Určete globální extrémy funkce $f(x, y) = 5x - 3y + 1$ na trojúhelníku s vrcholy $[1, 4]$, $[-2, 1]$, $[0, -1]$.

6. Určete globální extrémy funkce $f(x, y) = -x^2 - y^2 + 2y$ na trojúhelníku s vrcholy $[1, 4]$, $[-2, 1]$, $[0, -1]$.

7. Určete globální extrémy funkce $f(x, y) = -x^2 - y^2 + 2y$ na čtverci s vrcholy $[0, 0]$, $[-1, 0]$, $[-1, -1]$, $[0, -1]$.

8. Určete globální extrémy funkce $f(x, y) = -x^2 - y^2 + 2y$ na kruhu $x^2 + y^2 \leq 16$.

9. Určete globální extrémy funkce $f(x, y) = 2x + 4y + 1$ na elipse $x^2 + 4y^2 \leq 1$.

10. Určete globální extrémy funkce $f(x, y) = (x - y)^2 + x^2$ na čtverci s vrcholy $[2, 0]$, $[0, 2]$, $[-2, 0]$, $[0, -2]$.