24. cvičení – Lagrangeovy multiplikátory

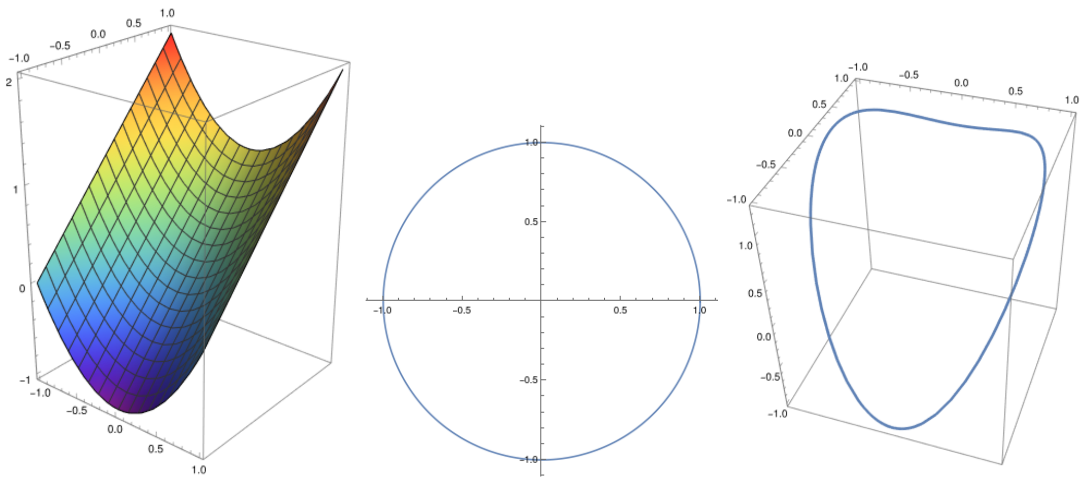
https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Příklady

1. Najděte globální extrémy funkcí na množině M

   (a) $f(x,y) = x^2 + y$, $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$
   Řešení:
   Zdroj: http://projects.math.slu.cz/AM/activ/soubory/opory/VybrPartCv.pdf

   - Označme $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$ a $G = \mathbb{R}^2$. Pak lze vazebnou podmínku psát jako $g(x,y) = 0$. Navíc $f, g \in \mathcal{C}^1(G)$ (polynomy).
     Dále $M = g^{-1}(0)$. Tedy jde o vzor uzavřené množiny při spojitém zobrazení, tedy je M uzavřená. M je navíc omezená - jde o kružnici se středem v počátku a poloměrem 1. Tedy M je kompakt.
     Tedy funkce f nabývá na M extrémů.



   - Aplikujeme větu o Lagrangeových multiplikátorech. Předpoklady jsou splněny (viz výše).
     – Vyšetřeme body, kde má g nulový gradient. Hledáme tedy body, kde

$$\nabla g = (2x, 2y) = (0,0).$$

     Tedy $(x,y) = (0,0)$. Tento bod ale neleží v M.
     – Vyšetřeme nyní soustavu rovnic s multiplikátorem λ.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial y} &= 0 \\ g(x,y) &= 0 \end{aligned}$$

Tedy

$$\begin{aligned} 2x + \lambda \cdot 2x &= 0 \\ 1 + \lambda \cdot 2y &= 0 \\ x^2 + y^2 - 1 &= 0. \end{aligned}$$

Z první rovnice máme

$$2x(1+\lambda) = 0.$$

Tedy $x = 0$ nebo $\lambda = -1$.
Pokud $x = 0$, tak z vazební podmínky je

$$y^2 = 1$$

tedy máme podezřelé body $[0, 1]$ a $[0, -1]$.
Pokud $\lambda = -1$, tak z druhé rovnice je $y = \frac{1}{2}$. Z vazební podmínky pak máme podezřelé body $[\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}]$ a $[-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}]$.

- Porovnáme hodnoty ve funkčních bodech:

$$\begin{aligned} f(0,1) &= 1 \\ f(0,-1) &= -1 \\ f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) &= \frac{5}{4} \\ f\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) &= \frac{5}{4} \end{aligned}$$

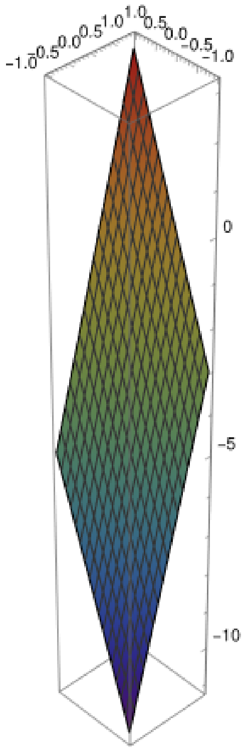
  Tedy funkce nabývá minima v bodě $[0, -1]$ s hodnotou -1 a maxima v bodech $[\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}]$ s hodnotou $\frac{5}{4}$.

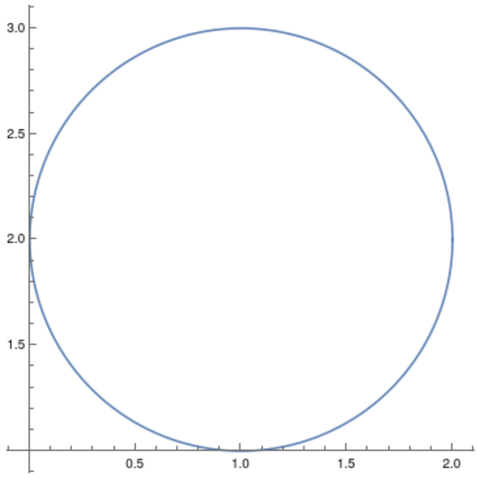
(b) $f(x, y) = 4x + 3y - 4$, $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + (y-2)^2 = 1\}$
Řešení:
Zdroj: http://projects.math.slu.cz/AM/activ/soubory/opory/VybrPartCv.pdf

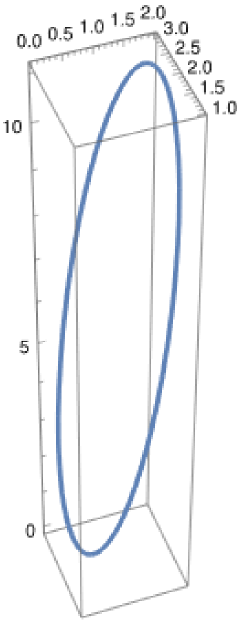
- Označme $g(x, y) = (x-1)^2 + (y-2)^2 - 1$ a $G = \mathbb{R}^2$. Pak lze vazebnou podmínku psát jako $g(x, y) = 0$. Navíc $f, g \in \mathcal{C}^1(G)$ (polynomy).
  Dále $M = g^{-1}(0)$. Tedy jde o vzor uzavřené množiny při spojitém zobrazení, tedy je M uzavřená. M je navíc omezená - jde o kružnici se středem v bodě $[1, 2]$ a poloměrem 1. Tedy M je kompakt.
  Tedy funkce f nabývá na M extrémů.
- Aplikujeme větu o Lagrangeových multiplikátorech. Předpoklady jsou splněny (viz výše).
  - Vyšetřeme body, kde má g nulový gradient. Hledáme tedy body, kde

$$\nabla g = (2x - 2, 2y - 4) = (0, 0).$$

    Tedy $(x, y) = (1, 2)$. Tento bod ale neleží v M.







– Vyšetřeme nyní soustavu rovnic s multiplikátorem λ.

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial x} &= 0\\ \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial y} &= 0\\ g(x,y) &= 0\end{aligned}$$

Tedy

$$\begin{aligned}4 + \lambda \cdot 2(x-1) &= 0\\ 3 + \lambda \cdot 2(y-2) &= 0\\ (x-1)^2 + (y-2)^2 &= 0.\end{aligned}$$

Z prvních dvou rovnic máme

$$x - 1 = -\frac{2}{\lambda}$$
$$y - 2 = -\frac{3}{2\lambda}$$

(Vyloučili jsme možnost $\lambda = 0$, protože nesplňuje soustavu rovnic.) Dosazením do vazební podmínky získáme

$$\lambda = \pm\frac{5}{2}$$

tedy máme podezřelé body $[\frac{1}{5}, \frac{7}{5}]$ a $[\frac{9}{5}, \frac{13}{5}]$.

- Porovnáme hodnoty ve funkčních bodech:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{5},\frac{7}{5}\right) &= 1 \\ f\left(\frac{9}{5},\frac{13}{5}\right) &= 11 \end{aligned}$$

  Tedy funkce nabývá minima v bodě $[\frac{1}{5},\frac{7}{5}]$ s hodnotou 1 a maxima v bodě $[\frac{9}{5},\frac{13}{5}]$. s hodnotou 11.

(c) $f(x,y,z) = x - y + 3z$, $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + 4z^2 = 4\}$

Řešení:

Zdroj: http://projects.math.slu.cz/AM/activ/soubory/opory/VybrPartCv.pdf

- Označme $g(x,y,z) = x^2 + y^2 + 4z^2 - 4$ a $G = \mathbb{R}^3$. Pak lze vazebnou podmínku psát jako $g(x,y,z) = 0$. Navíc $f, g \in \mathcal{C}^1(G)$ (polynomy).
  Dále $M = g^{-1}(0)$. Tedy jde o vzor uzavřené množiny při spojitém zobrazení, tedy je M uzavřená. M je navíc omezená - jde o povrch elipsoidu se středem v počátku, který se vejde do koule $B(o,3)$. Tedy M je kompakt.
  Tedy funkce f nabývá na M extrémů.

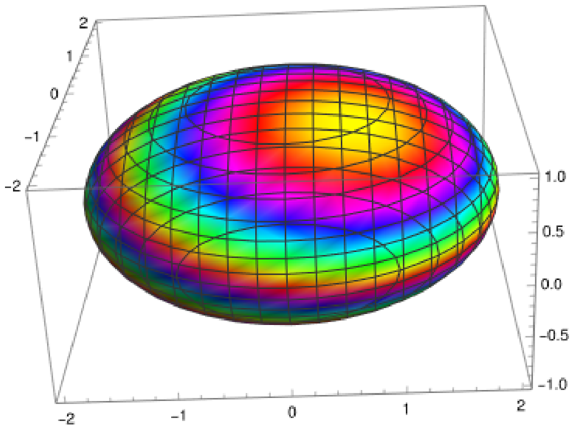


Figure 1: Obarvení povrchu naznačuje funkční hodnotu

- Aplikujeme větu o Lagrangeových multiplikátorech. Předpoklady jsou splněny (viz výše).
  - Vyšetřeme body, kde má g nulový gradient. Hledáme tedy body, kde

$$\nabla g = (2x, 2y, 4z) = (0,0,0).$$

    Tedy $(x,y,z) = (0,0,0)$. Tento bod ale neleží v M.

– Vyšetřeme nyní soustavu rovnic s multiplikátorem λ.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z} + \lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial y} &= 0 \\ g(x,y,z) &= 0 \end{aligned}$$

Tedy

$$\begin{aligned} 1 + \lambda \cdot 2x &= 0 \\ -1 + \lambda \cdot 2y &= 0 \\ 3 + \lambda \cdot 8z &= 0 \\ x^2 + y^2 + 4z^2 - 4 &= 0. \end{aligned}$$

Z prvních dvou rovnic máme

$$\begin{aligned} x &= -\frac{1}{2\lambda} \\ y &= \frac{1}{2\lambda} \\ z &= -\frac{3}{8\lambda} \end{aligned}$$

(Vyloučili jsme možnost $\lambda = 0$, protože nesplňuje soustavu rovnic.) Dosazením do vazební podmínky získáme

$$\lambda = \pm\frac{\sqrt{17}}{8}$$

tedy máme podezřelé body $[\frac{4}{\sqrt{17}}, -\frac{4}{\sqrt{17}}, \frac{3}{\sqrt{17}}]$. a $[-\frac{4}{\sqrt{17}}, \frac{4}{\sqrt{17}}, -\frac{3}{\sqrt{17}}]$.

- Porovnáme hodnoty ve funkčních bodech:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{4}{\sqrt{17}}, -\frac{4}{\sqrt{17}}, \frac{3}{\sqrt{17}}\right) &= \sqrt{17} \\ f\left(-\frac{4}{\sqrt{17}}, \frac{4}{\sqrt{17}}, -\frac{3}{\sqrt{17}}\right) &= -\sqrt{17} \end{aligned}$$

Tedy funkce nabývá minima v bodě $\left(-\frac{4}{\sqrt{17}}, \frac{4}{\sqrt{17}}, -\frac{3}{\sqrt{17}}\right)$ s hodnotou $-\sqrt{17}$ a maxima v bodě $\left(\frac{4}{\sqrt{17}}, -\frac{4}{\sqrt{17}}, \frac{3}{\sqrt{17}}\right)$ s hodnotou $\sqrt{17}$.

(d) $f(x,y) = x^2 + y^2$, $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : 5x^2 - 6xy + 5y^2 - 4 = 0\}$

Řešení:

Zdroj: `https://matematika.cuni.cz/dl/ikalkulus/KAP17.pdf`

- Označme $g(x,y) = 5x^2 - 6xy + 5y^2 - 4 = 0$ a $G = \mathbb{R}^2$. Pak lze vazebnou podmínku psát jako $g(x,y) = 0$. Navíc $f, g \in \mathcal{C}^1(G)$ (polynomy).

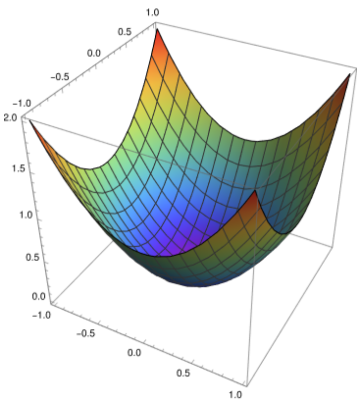
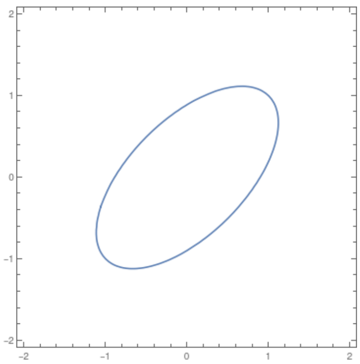
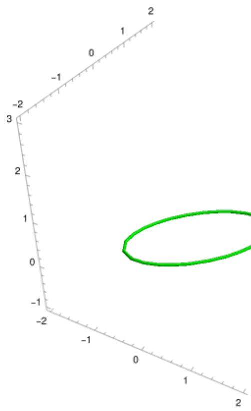
Dále $M = g^{-1}(0)$. Tedy jde o vzor uzavřené množiny při spojitém zobrazení, tedy je M uzavřená.
M je navíc omezená - jde o pootočenou elipsu (to by se ukázalo, kdybychom „otočili" soustavu souřadnic). Omezenost plyne z těchto odhadů:

$$5(x^2 + y^2) = 4 + 6xy \leq 4 + 3(x^2 + y^2)$$

tedy

$$2(x^2 + y^2) \leq 4$$

Tedy M je kompakt.
Tedy funkce f nabývá na M extrémů.

- Aplikujeme větu o Lagrangeových multiplikátorech. Předpoklady jsou splněny (viz výše).
  - Vyšetřeme body, kde má g nulový gradient. Hledáme tedy body, kde

    $$\nabla g = (10x - 6y, -6x + 10y) = (0, 0).$$

    Tedy $(x, y) = (0, 0)$. Tento bod ale neleží v M.
  - Vyšetřeme nyní soustavu rovnic s multiplikátorem λ.

    $$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial y} &= 0 \\ g(x, y) &= 0 \end{aligned}$$

    Tedy

    $$\begin{aligned} 2x + \lambda \cdot (10x - 6y) &= 0 \\ 2y + \lambda \cdot (-6x + 10y) &= 0 \\ 5x^2 - 6xy + 5y^2 - 4 &= 0. \end{aligned}$$

    Z prvních dvou rovnic máme

    $$x(5\lambda + 1) = 3\lambda y$$
    $$y(5\lambda + 1) = 3\lambda x$$

Vyloučíme možnost $\lambda = 0$, protože pak by byl řešením bod $(0,0)$, který nesplňuje vazební podmínku. Analogicky vyloučíme možnost $(5\lambda+1) = 0$. Uvažujeme-li $x = 0$, tak opět vyjde řešení $(0,0)$. Analogicky pro $y = 0$. Můžeme tedy obě rovnice vynásobit postupně y a x. Dostaneme

$$\begin{aligned} yx(5\lambda+1) &= 3\lambda y^2 \\ xy(5\lambda+1) &= 3\lambda x^2 \end{aligned}$$

Tedy $y = \pm x$.
Dosazením do vazební podmínky získáme pro $y = x$

$$5x^2 - 6x^2 + 5x^2 - 4 = 0$$

a pro $y = -x$

$$5x^2 + 6x^2 + 5x^2 - 4 = 0$$

tedy máme podezřelé body $[1,1]$, $[-1,-1]$, $[\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}]$ a $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

- Porovnáme hodnoty ve funkčních bodech:

$$\begin{aligned} f(1,1) &= \quad 2 \\ f(-1,-1) &= \quad 2 \\ f(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) &= \quad \frac{1}{2} \\ f(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) &= \quad \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Tedy funkce nabývá minima v bodech $[\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}]$ a $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ s hodnotou $\frac{1}{2}$ a maxima v bodech $[1,1]$, $[-1,-1]$ s hodnotou 2.

Dosadíme-li $x = \pi$ a použijeme-li $\varphi(\pi) = 0$, dostaneme $\varphi'(\pi) = 0$ a $\varphi''(\pi) = 0$.

2a) **Příklad A4 :** Množina M je omezená a uzavřená, a proto je kompaktní. Funkce f je spojitá na M, takže na M nabývá svého maxima i minima. Spočtěme parciální derivace funkce f a zkoumejme, zda uvnitř množin M existuje bod, kde jsou obě parciální derivace funkce f nulové.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 4x^3 y, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^4, \qquad [x, y] \in \mathbb{R}^2.$$

Obě parciální derivace jsou nulové pro $[0, y]$; $y \in (-2, 2)$. Hranici množiny M si rozdělme na dvě části:

$$H_1 = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2;\ x^4 + y^4 = 16, x > -1\}, \qquad H_2 = \{[-1, y] \in \mathbb{R}^2;\ y \in \langle -\sqrt[4]{15}, \sqrt[4]{15}\rangle\}.$$

Pro nalezení podezřelých bodů na množině H_1 použijeme metodu Lagrangeových multiplikátorů. Vazebná podmínka je určena funkcí $g(x, y) = x^4 + y^4 - 16$, která je (stejně jako f) třídy $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$. Pro parciální derivace funkce g platí

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = 4x^3, \qquad \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 4y^3, \qquad [x, y] \in \mathbb{R}^2.$$

Pro každé $[x, y] \in H_1$ platí $(\frac{\partial g}{\partial x}(x, y), \frac{\partial g}{\partial y}(x, y)) \neq (0, 0)$. Řešme následující soustavu

$$\begin{aligned} &(1) & x^4 + y^4 &= 16, \\ &(2) & 4x^3 y &= \lambda 4x^3, \\ &(3) & x^4 &= \lambda 4y^3. \end{aligned}$$

Z (2) vyplývá, že $x = 0$ nebo $y = \lambda$. V prvním případě dostaneme z (1), že $y = \pm 2$. V druhém případě dostaneme z (3), že $x = \sqrt{2}y$ nebo $x = -\sqrt{2}y$. Dosazením do (1) obdržíme body

$$\left[\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[4]{5}}, \frac{2}{\sqrt[4]{5}}\right], \quad \left[\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[4]{5}}, -\frac{2}{\sqrt[4]{5}}\right], \quad \left[-\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[4]{5}}, \frac{2}{\sqrt[4]{5}}\right], \quad \left[-\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[4]{5}}, -\frac{2}{\sqrt[4]{5}}\right],$$

Poslední dva body ovšem nesplňují podmínku $x > -1$.

Zkoumejme chování na množině H_2. Funkce f má na H_2 tvar:

$$f(-1, y) = y, \qquad y \in \langle -\sqrt[4]{15}, \sqrt[4]{15}\rangle.$$

Dalšími podezřelými body tedy jsou

$$[-1, \sqrt[4]{15}], \qquad [-1, -\sqrt[4]{15}]$$

Porovnáním funkčních hodnot v podezřelých bodech zjistíme, že f nabývá maxima na množině M v bodě $\left[\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[4]{5}}, \frac{2}{\sqrt[4]{5}}\right]$ a minima v bodě $\left[\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[4]{5}}, -\frac{2}{\sqrt[4]{5}}\right]$.

Funkce F je definována na $\mathbb{R}^2$ a pro její parciální derivace platí:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = 8x^3y + 3x^2 + y,$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = 2x^4 + 3y^2 + x.$$

Obě parciální derivace jsou na $\mathbb{R}^2$ spojité, stejně jako jejich parciální derivace, tj. $F \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$. Dále platí $F(1,0) = 0$ a $\frac{\partial F}{\partial y}(1,0) = 3 \neq 0$. Tím jsme ověřili, že naše rovnice určuje v jistém okolí bodu $[1,0]$ implicitně zadanou funkci proměnné x, která sama je třídy $\mathcal{C}^2$. Funkci označme φ a její derivace vypočítejme postupným derivováním vztahu

$$2x^4\varphi(x) + x^3 + \varphi(x)^3 + x\varphi(x) - 1 = 0,$$
$$8x^3\varphi(x) + 2x^4\varphi'(x) + 3x^2 + 3\varphi(x)^2\varphi'(x) + \varphi(x) + x\varphi'(x) = 0,$$
$$24x^2\varphi(x) + 8x^3\varphi'(x) + 8x^3\varphi'(x) + 2x^4\varphi''(x) + 6x + 6\varphi(x)(\varphi'(x))^2 + 3\varphi(x)^2\varphi''(x)$$
$$+\varphi'(x) + \varphi'(x) + x\varphi''(x) = 0.$$

Dosadíme-li $x = 1$ a použijeme-li $\varphi(1) = 0$, dostaneme $\varphi'(1) = -1$ a $\varphi''(1) = 4$.

2b)

Příklad B4 : Množina M je omezená a uzavřená, a proto je kompaktní. Funkce f je spojitá na M, takže na M nabývá svého maxima i minima. Spočtěme parciální derivace funkce f a zkoumejme, zda uvnitř množiny M existuje bod, kde jsou obě parciální derivace funkce f nulové.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4, \qquad [x,y] \in \mathbb{R}^2.$$

Obě parciální derivace jsou vždy nenulové a proto f nabývá extrémů na hranici M. Hranici množiny M si rozdělme na tři části:

$$H_1 = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2;\ \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y} = 1, x > 0,\ y > 0\},$$
$$H_2 = \{[0,y] \in \mathbb{R}^2;\ y \in \langle 0,1\rangle\},$$
$$H_3 = \{[x,0] \in \mathbb{R}^2;\ x \in \langle 0,1\rangle\}.$$

Pro nalezení podezřelých bodů na množině H_1 použijeme metodu Lagrangeových multiplikátorů. Vazebná podmínka je určena funkcí $g(x,y) = \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y} - 1$, která je (stejně jako f) třídy $\mathcal{C}^1$ na prvním otevřeném kvadrantu. Pro parciální derivace funkce g platí

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{4}x^{-3/4}, \qquad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{4}y^{-3/4}, \qquad x > 0,\ y > 0.$$

Pro každé $[x,y] \in H_1$ platí $(\frac{\partial g}{\partial x}(x,y), \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)) \neq (0,0)$. Řešme následující soustavu

(1) $$\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y} = 1,$$

(2) $$2 = \lambda\frac{1}{4}x^{-3/4},$$

(3) $$4 = \lambda\frac{1}{4}y^{-3/4}.$$

Z (2) a (3) vyplývá, že $x = 2\sqrt[3]{2}y$. Dosazením do (1) obdržíme podezřelý bod

$$\left[\frac{2^{4/3}}{(2^{1/3}+1)^4}, \frac{1}{(2^{1/3}+1)^4}\right].$$

Zkoumejme chování na množině H_2. Funkce f má na H_2 tvar:

$$f(0,y) = 4y, \qquad y \in \langle 0,1 \rangle.$$

Dalšími podezřelými body tedy jsou $[0,0]$, $[0,1]$.

Podobně zkoumejme chování na množině H_3. Funkce f má na H_3 tvar:

$$f(x,0) = 2x, \qquad x \in \langle 0,1 \rangle.$$

Podezřelými body tedy jsou $[0,0]$, $[1,0]$.

Porovnáním funkčních hodnot v podezřelých bodech zjistíme, že f nabývá maxima na množině M v bodě $[0,1]$ a minima v bodě $[0,0]$.

Příklad B5 : Funkce, kterou máme integrovat, je definována na $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Rozložme naši funkci na parciální zlomky:

$$\frac{2x^2+3x+2}{(x+1)(x^2+x+1)} = \frac{1}{x+1} + \frac{x+1}{x^2+x+1}.$$

Nyní integrujme jednotlivé parciální zlomky:

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x+1}\,dx &\stackrel{c}{=} \log|x+1|, \\
\int \frac{x+1}{x^2+x+1}\,dx &= \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+x+1} \\
&= \frac{1}{2}\log(x^2+x+1) + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x+1/2)^2+3/4} \\
&= \frac{1}{2}\log(x^2+x+1) + \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\int \frac{dx}{((2x+1)/\sqrt{3})^2+1} \\
&\stackrel{c}{=} \frac{1}{2}\log(x^2+x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right).
\end{aligned}$$

Dohromady tedy máme

$$\int \frac{2x^2+3x+2}{(x+1)(x^2+x+1)}\,dx \stackrel{c}{=} \log|x+1| + \frac{1}{2}\log(x^2+x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)$$

na intervalech $(-\infty,-1)$ a $(-1,+\infty)$.

2c

Příklad F4 : Množina M je omezená a uzavřená (jedná se o elipsu), a proto je kompaktní. Funkce f je spojitá na M, takže na M nabývá svého maxima i minima. Hledejme nejprve podezřelé body uvnitř množiny M. Pro parciální derivace funkce f platí:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x \cdot e^{-(2x^2+y^2)} + (x^2+7y^2)e^{-(2x^2+y^2)} \cdot (-4x),$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 14y \cdot e^{-(2x^2+y^2)} + (x^2+7y^2)e^{-(2x^2+y^2)} \cdot (-2y).$$

Uvnitř množiny M hledáme ty body, kde jsou obě parciální derivace nulové. To jsou právě ty body z M, které splňují

$$2x(1-2(x^2+7y^2)) = 0,$$
$$2y(7-(x^2+7y^2)) = 0.$$

Řešením této soustavy jsou body $[0,0]$, $[1/\sqrt{2},0]$, $[-1/\sqrt{2},0]$, $[0,1]$, $[0,-1]$, pouze první tři však leží uvnitř množiny M.

Podezřelé body na hranici M hledejme metodou Lagrangeových multiplikátorů. Množina $H(M)$ je určena pomocí vazebné funkce

$$g(x,y) = x^2+4y^2-1.$$

Funkce f i g jsou třídy $C^1(\mathbb{R}^2)$. Pro parciální derivace g platí

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 2x, \qquad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 8y.$$

Vektor $(2x,8y)$ je nulový, právě když $[x,y]=[0,0]$. Tento bod ovšem neleží na hranici množiny M. Nyní budeme řešit následující soustavu

$$(1) \qquad 2x \cdot e^{-(2x^2+y^2)} + (x^2+7y^2)e^{-(2x^2+y^2)} \cdot (-4x) = 2\lambda x,$$
$$(2) \qquad 14y \cdot e^{-(2x^2+y^2)} + (x^2+7y^2)e^{-(2x^2+y^2)} \cdot (-2y) = 8\lambda y,$$
$$(3) \qquad x^2+4y^2 = 1.$$

Z (1) vyplývá, že $x=0$ nebo $e^{-(2x^2+y^2)}(1-2(x^2+7y^2)) = \lambda$ a z (2) vyplývá, že $y=0$ nebo $e^{-(2x^2+y^2)}(7-(x^2+7y^2)) = 4\lambda$. Pokud $x=0$, pak podle (3) je $y=\pm 1/2$. Pokud $y=0$, pak podle (3) je $x=\pm 1$. V případě, že $x \neq 0$ a $y \neq 0$, musí být

$$4e^{-(2x^2+y^2)}(1-2(x^2+7y^2)) = e^{-(2x^2+y^2)}(7-(x^2+7y^2)).$$

Odtud plyne $7(x^2+7y^2) = -3$, což je spor.

Nalezli jsme tyto podezřelé body

$$[0,0],\ [1/\sqrt{2},0],\ [-1/\sqrt{2},0],\ [0,1/2],\ [0,-1/2],\ [1,0],\ [-1,0].$$

Funkce f nabývá maxima v bodech $[0,1/2]$, $[0,-1/2]$ a minima v bodě $[0,0]$.