



23. cvičení – Lokální extrémy

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Teorie

Věta 1 (Nutná podmínka existence extrému). Nechť $n \in \mathbb{N}$, $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená, $a \in G$ a $i \in \{1, \dots, n\}$. Nechť funkce $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ má v bodě a lokální extrém. Potom buď $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ neexistuje nebo $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$.

Věta 2 (Postačující podmínky pro lokální extrém). Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená, $a \in G$ a nechť $f \in C^2(G)$. Nechť $\text{grad } f(a) = 0$. Pak

1. Je-li kvadratická forma $f''(a)$ **pozitivně definitní**, pak funkce f nabývá v bodě a svého ostrého **lokálního minima**.
2. Je-li kvadratická forma $f''(a)$ **negativně definitní**, pak funkce f nabývá v bodě a svého ostrého **lokálního maxima**.
3. Je-li kvadratická forma $f''(a)$ **indefinitní**, pak funkce f **nenabývá** v bodě a lokálního extrému.

Poznámka 3. Symetrická matice $\begin{pmatrix} b & d \\ d & c \end{pmatrix}$ je

1. pozitivně definitní, právě když $b > 0$ a $bc > d^2$,
2. negativně definitní, právě když $b < 0$ a $bc > d^2$,
3. indefinitní, právě když $bc < d^2$.

Poznámka 4 (Sylvesterovo kritérium). Nechť $\mathbf{A}$ je symetrická matice reálných čísel typu (n, n) . Označme $\{D_k\}$ posloupnost determinantů levých horních rohů. Pak

1. $\mathbf{A}$ je pozitivně definitní, právě když všechna $D_k > 0$;
2. $\mathbf{A}$ je negativně definitní, právě když $D_1 < 0$, $D_2 > 0$, $D_3 < 0, \dots$;
3. jestliže všechny hlavní subdeterminanty jsou **nenulové** a navíc nenastaly předchozí případy, pak $\mathbf{A}$ je indefinitní.

Algoritmus: Lokální extrémy (v závorce dimenze pro funkci 2 proměnných):

1. **Zderivujeme** - máme (dvě) parciální derivace.
2. Položíme derivace **rovny nule**. Vyřešíme soustavu a najdeme **podezřelé body**.
3. Vytvoříme **matici druhých derivací** (2x2).
4. **Dosadíme** podezřelé body. Pro každý dostaneme matici. Vyhodnotíme ji Sylvesterovým kritériem (příp. technikami z lingebry) - zjistíme **definitnost**. Tím vyšetříme podezřelé body a získáme lokální extrémy nebo sedla.
5. Pokud je matice semidefinitní, vyšetříme funkci „nějak jinak“.
6. Sepíšeme **závěr**.

Algoritmus: Extrémy na omezené množině:

1. Je-li množina uzavřená, tak odůvodníme, že **spojitá** funkce na **kompaktu** nabývá extrémů.
2. Extrémy mohou být:
 - (a) na **vnitřku** množiny jen v místech s nulovými derivacemi (jejich typ nevyšetřujeme, pokud na to nejsme přímo tázáni);
 - (b) v bodech vnitřku, kde **neexistuje derivace**;
 - (c) na **hranici**: hraniční křivky (nebo plochy) - obvykle lze dosadit a výraz zjednodušit.
 - (d) na hranici hranice: **krajní body**, vrcholy trojúhelníku atp.
3. Všechny podezřelé body sepíšeme a **porovnáme** jejich funkční hodnoty. Vybereme maximum a minimum.

Příklady

1. Najděte lokální extrémy funkcí

- | | |
|--|--|
| (a) $f(x, y) = x^2 + (y - 1)^2$ | (h) $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3(xy + xz)$ |
| (b) $f(x, y) = x^2 - (y - 1)^2$ | (i) $f(x, y, z) = x^3 + y^2 + \frac{z^2}{2} - 3xz - 2y + 2z$ |
| (c) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ | (j) $f(x, y) = e^{-x^2 - y^2}(2y^2 + x^2)$ |
| (d) $f(x, y) = 2y^2 - 4xy + x^4 + 3$ | (k) $f(x, y) = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}, x, y > 0$ |
| (e) $f(x, y) = y^3 + y^2x - x^2 - 4x$ | (l) $f(x, y) = (x - y + 1)^2$ |
| (f) $f(x, y) = 2x^3 + 9xy^2 + 15x^2 + 27y^2$ | (m) $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3(xy + xz)$ |
| (g) $f(x, y, z) = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z$ | |

2. Najděte extrémy funkcí na množině

- (a) $f(x, y) = x^3 - 2x^2y + 3y^3$ na $M = [-1; 1]^2$
- (b) $f(x, y) = x^2 - 3y^2 + xy$ na $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$
- (c) $f(x, y) = x^2 - 3y^2 - x + 18y + 4$ na $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq y \leq 4\}$
- (d) $f(x, y) = (x - y)^2 + x^2$ na M ,
kde M je čtverec s vrcholy $A = [2, 0]$, $B = [0, 2]$, $C = [-2, 0]$, $D = [0, -2]$

Bonus

3. ✱ Najděte lokální extrémy funkce $f(x, y, z) = x^3 + y^2 + z^2 + 6xy + 2z$
4. ✱ Ukažte, že funkce $f(x, y) = (x - y^2)(2x - y^2)$ má v $[0, 0]$ lok. minimum vzhledem ke všem přímkám, ale nemá tam minimum.
5. Najděte Hessovu matici v následujících funkcí $[0, 0]$ a diskutujte existenci maxima/minima/sedla vzhledem k semidefinitnosti matice.

- | | | |
|-----------------|------------------|-----------------|
| (a) $x^4 + y^4$ | (b) $-x^4 - y^4$ | (c) $x^4 - y^4$ |
|-----------------|------------------|-----------------|

(f) Zkoumáme přímku $[x, 0, -1]$ a $[0, 0, 1]$ (g)
(f) Zkoumáme přímku $[x, 0, -1]$ a $[0, 0, 1]$ (g)