22. cvičení – Implicitní funkce

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Příklady

1. Ukažte, že rovnice $(x^2+y^2)^2 - 3x^2y - y^3 = 0$ určuje na okolí bodu $[0,1]$ implicitně zadanou funkci $y(x)$. Spočtěte první a druhou derivaci této funkce v bodě 0.
   Zdroj příkladu: http://homel.vsb.cz/~kre40/esfmat2/kapitoly/kapitola_5_3.pdf
   Řešení: Položme $F = (x^2+y^2)^2 - 3x^2y - y^3$, $G = \mathbb{R}^2$, $k = 2$ a $(\bar{x}, \bar{y}) = (0,1)$. Pak
   (a) $F \in \mathcal{C}^k(G)$
   (b) $F(0,1) = 1 - 0 - 1 = 0$
   (c) $\frac{\partial F}{\partial y} = 2(x^2+y^2)2y - 3x^2 - 3y^2$, $\frac{\partial F}{\partial y}(0,1) = 1 \neq 0$.

   Tedy jsou splněny podmínky věty o implicitní funkci a existuje $\varepsilon > 0$ a $\delta > 0$ takové, že pro každé $x \in (\bar{x}-\varepsilon, \bar{x}+\varepsilon)$ existuje právě jedno $y \in (\bar{y}-\delta, \bar{y}+\delta)$ s vlastností $F(x,y) = 0$. Označíme-li toto y symbolem $\varphi(x)$, pak $\varphi(x) \in \mathcal{C}^2((\bar{x}-\varepsilon, \bar{x}+\varepsilon))$.
   Uvažujme původní rovnici (y je nyní funkce, pro názornost můžeme psát $y(x)$):

$$(x^2 + y(x)^2)^2 - 3x^2y(x) - y(x)^3 = 0$$

   Zderivujme obě strany podle x (pozor na vnitřní funkci) a vyjádřeme y:

$$\begin{aligned} 2(x^2+y(x)^2)(2x+2y(x)y'(x)) - 6xy(x) - 3x^2y'(x) - 3y(x)^2y'(x) &= 0 \\ 4x^3 + 4x^2y(x)y'(x) + 4xy(x)^2 + 4y(x)^3y(x)' - 6xy(x) - 3x^2y(x)' - 3y(x)^2y(x)' &= 0 \\ y'(x)\left(4x^2y(x) + 4y(x)^3 - 3x^2 - 3y(x)^2\right) &= -4x^3 - 4xy(x)^2 + 6xy(x) \\ y'(x) &= \frac{-4x^3 - 4xy(x)^2 + 6xy(x)}{4x^2y(x) + 4y(x)^3 - 3x^2 - 3y(x)^2} \end{aligned}$$

   Dosadíme $(x, y(x)) = (0,1)$ a získáme

$$y'(0) = \frac{0}{-1}.$$

   Pro druhou derivaci ještě jednou zderivujeme rovnici (budeme pro zjednodušení psát y místo $y(x)$).

$$y'\left(4x^2y + 4y^3 - 3x^2 - 3y^2\right) = -4x^3 - 4xy^2 + 6xy$$

   Tedy

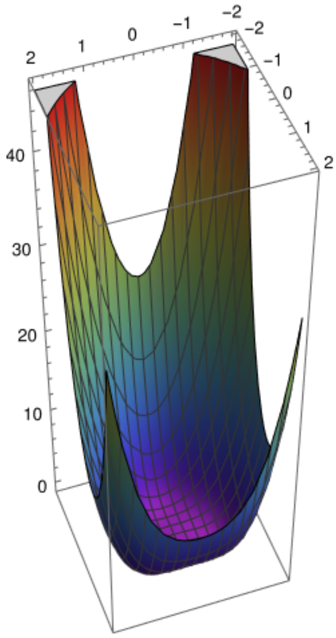
$$\begin{aligned} y''\left(4x^2y + 4y^3 - 3x^2 - 3y^2\right) + y'\left(8xy + 4x^2y' + 12y^2y' - 6x - 6yy'\right) &= \\ -12x^2 - 4y^2 - 8xyy' + 6y + 6xy' \end{aligned}$$

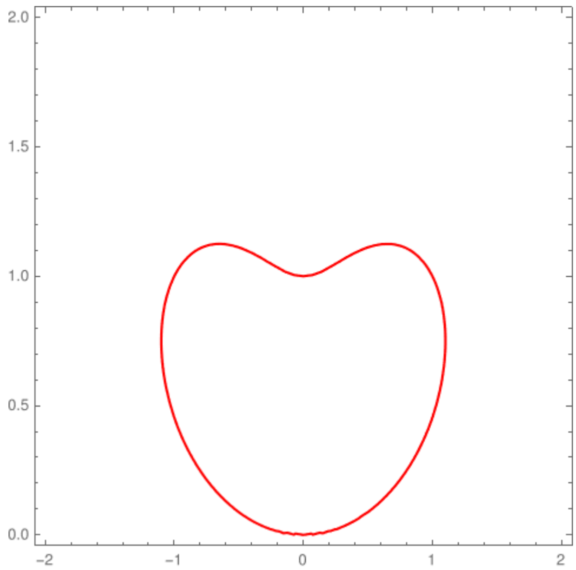
   Dosadíme $x = 0$, $y(x) = 1$ a $y'(x) = 0$.

$$y''(0)(0+4-0-3) + 0(0+0+0-0-0) = -0-4-0+6+0$$

   Tedy

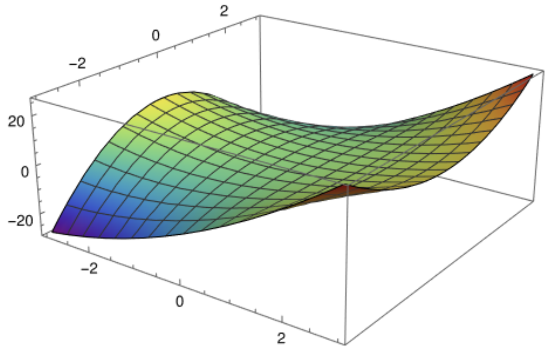
$$y''(0) = 2.$$

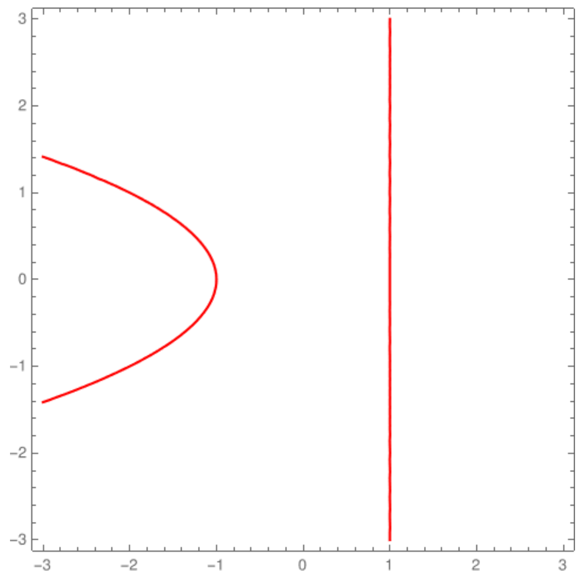




2. Ukažte, že rovnice $x^2 + xy^2 - y^2 = 1$ určuje na okolí bodu $[-2, 1]$ implicitně zadanou funkci $y(x)$. Spočtěte první derivaci této funkce v bodě -2.
   Zdroj příkladu: http://projects.math.slu.cz/AM/activ/soubory/opory/VybrPartCv.pdf
   Řešení: Položme $F = x^2 - y^2 + xy^2 - 1$, $G = \mathbb{R}^2$, $k = 1$ a $(\bar{x}, \bar{y}) = (-2, 1)$. Pak
   (a) $F \in \mathcal{C}^k(G)$
   (b) $F(-2, 1) = 4 - 2 - 1 - 1 = 0$
   (c) $\frac{\partial F}{\partial y} = -2y + 2xy$, $\frac{\partial F}{\partial y}(-2, 1) = -2 - 4 = -6 \neq 0$.

   Tedy jsou splněny podmínky věty o implicitní funkci a existuje $\varepsilon > 0$ a $\delta > 0$ takové, že pro každé $x \in (\bar{x} - \varepsilon, \bar{x} + \varepsilon)$ existuje právě jedno $y \in (\bar{y} - \delta, \bar{y} + \delta)$ s vlastností $F(x, y) = 0$. Označíme-li toto y symbolem $\varphi(x)$, pak $\varphi(x) \in \mathcal{C}^2((\bar{x} - \varepsilon, \bar{x} + \varepsilon))$.
   Zderivujeme podle x a použijeme vzorec.
$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x + y^2, \qquad \frac{\partial F}{\partial x}(-2, 1) = -4 + 1 = -3.$$
   Pak
$$y'(-2) = -\frac{-3}{-6} = -\frac{3}{6}.$$





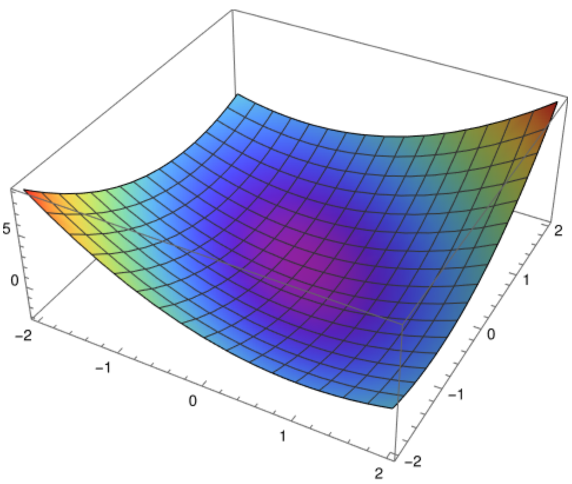
3. Ukažte, že rovnice $x^2 + y^2 + xy - 3 = 0$ určuje na okolí bodu $[1, 1]$ implicitně zadanou funkci $y(x)$. Spočtěte první a druhou derivaci této funkce v bodě 1.
Zdroj příkladu: http://homel.vsb.cz/~kre40/esfmat2/kapitoly/kapitola_5_3.pdf
Řešení: Položme $F = x^2 + y^2 + xy - 3$, $G = \mathbb{R}^2$, $k = 2$ a $(\bar{x}, \bar{y}) = (1, 1)$. Pak
   (a) $F \in \mathcal{C}^k(G)$
   (b) $F(1, 1) = 1 + 1 + 1 - 3 = 0$
   (c) $\frac{\partial F}{\partial y} = 2y + x$, $\frac{\partial F}{\partial y}(1, 1) = 3 \neq 0$.

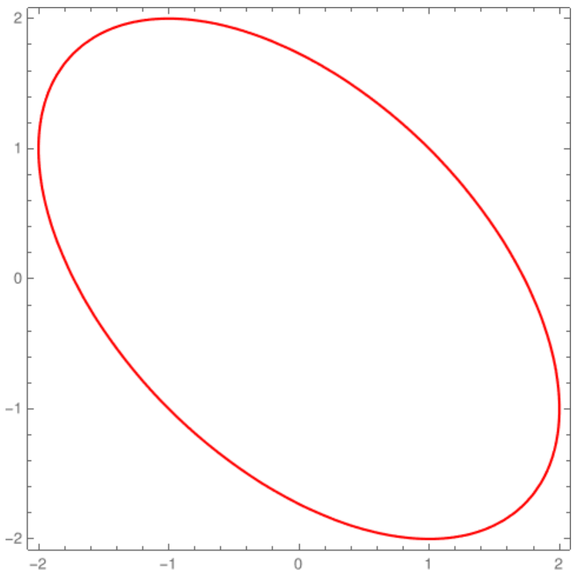
   Tedy jsou splněny podmínky věty o implicitní funkci a existuje $\varepsilon > 0$ a $\delta > 0$ takové, že pro každé $x \in (\bar{x} - \varepsilon, \bar{x} + \varepsilon)$ existuje právě jedno $y \in (\bar{y} - \delta, \bar{y} + \delta)$ s vlastností $F(x, y) = 0$. Označíme-li toto y symbolem $\varphi(x)$, pak $\varphi(x) \in \mathcal{C}^2((\bar{x} - \varepsilon, \bar{x} + \varepsilon))$. Zderivujeme původní rovnici
$$\begin{aligned} 2x + 2yy' + y + xy' &= 0 \\ y'(2y + x) &= -2x - y \\ y' &= \frac{-2x - y}{2y + x} \end{aligned}$$
   Dosadíme bod $[1, 1]$ a získáme
$$y'(1) = -1.$$
   Pro druhou derivaci zderivujeme ještě jednou
$$\begin{aligned} y''(2y + x) + y'(2y' + 1) &= -2 - y' \\ y'' &= \frac{-y'(2y' + 1) - 2 - y'}{(2y + x)} \\ y'' &= \frac{-2(y')^2 - 2y' - 2}{(2y + x)} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
y''(2y + x) + y'(2y' + 1) &= -2 - y' \\
y'' &= \frac{-y'(2y' + 1) - 2 - y'}{(2y + x)} \\
y'' &= \frac{-2(y')^2 - 2y' - 2}{(2y + x)}
\end{aligned}
$$

Dosadíme $x = 1$, $y = 1$, $y' = -1$:

$$
y''(1) = \frac{-2 + 2 - 2}{2 + 1} = -\frac{2}{3}.
$$





4. Ukažte, že rovnice $y - \frac{1}{2}\sin y = x$ určuje na okolí bodu $[\pi, \pi]$ implicitně zadanou funkci $y(x)$. Najděte rovnici tečny v bodě $[\pi, \pi]$.
   Zdroj příkladu: http://projects.math.slu.cz/AM/activ/soubory/opory/VybrPartCv.pdf
   Řešení: Položme $F = y - \frac{1}{2}\sin y - x$, $G = \mathbb{R}^2$, $k = 1$ a $(\bar{x}, \bar{y}) = (\pi, \pi)$. Pak
   (a) $F \in \mathcal{C}^k(G)$,
   (b) $F(\pi, \pi) = \pi - 0 - \pi = 0$,
   (c) $\frac{\partial F}{\partial y} = 1 - \frac{1}{2}\cos y$, $\frac{\partial F}{\partial y}(\pi, \pi) = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \neq 0$.

   Tedy jsou splněny podmínky věty o implicitní funkci a existuje $\varepsilon > 0$ a $\delta > 0$ takové, že pro každé $x \in (\bar{x} - \varepsilon, \bar{x} + \varepsilon)$ existuje právě jedno $y \in (\bar{y} - \delta, \bar{y} + \delta)$ s vlastností $F(x, y) = 0$. Označíme-li toto y symbolem $\varphi(x)$, pak $\varphi(x) \in \mathcal{C}^2((\bar{x} - \varepsilon, \bar{x} + \varepsilon))$.
   Zderivujeme podle x a použijeme vzorec.

$$
\frac{\partial F}{\partial x} = -1, \qquad \frac{\partial F}{\partial x}(\pi, \pi) = -1.
$$

Pak

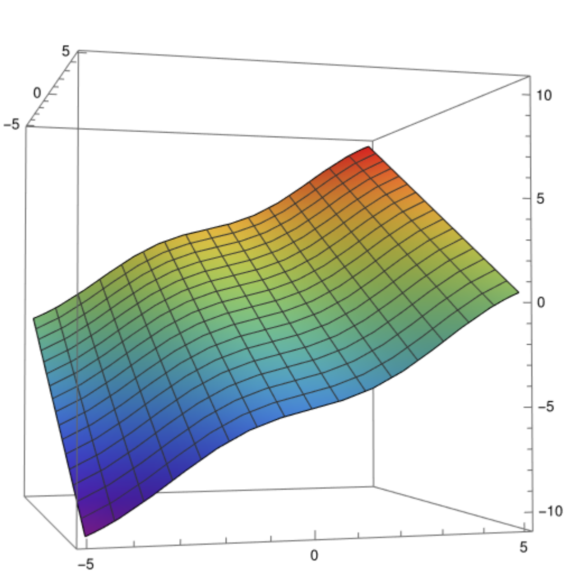
$$y'(\pi) = -\frac{-1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}.$$

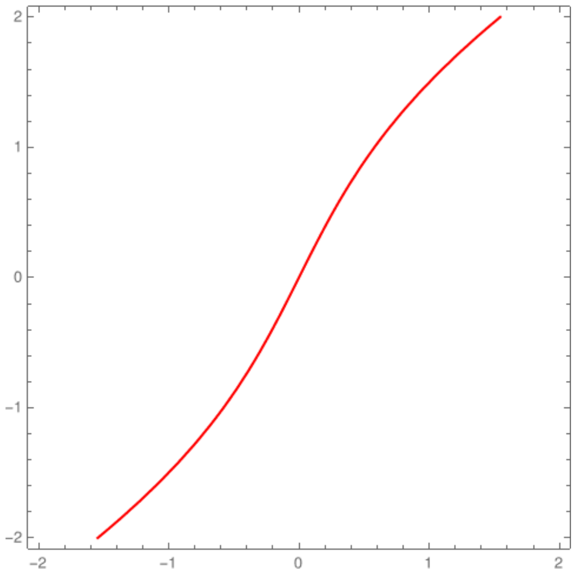
Pro rovnici tečny platí

$$y = \bar{y} + f'(x)(x - \bar{x})$$

Tedy

$$y = \pi + \frac{2}{3}(x - \pi).$$





5. Ukažte, že rovnice $y - \frac{1}{2}\sin y = x$ určuje na okolí bodu $[\frac{\pi-1}{2}, \frac{\pi}{2}]$ implicitně zadanou funkci $y(x)$. Určete, zda graf této funkce leží na okolí daného bodu pod tečnou nebo nad tečnou.
   Zdroj příkladu: http://projects.math.slu.cz/AM/activ/soubory/opory/VybrPartCv.pdf
   Řešení: Položme $F = y - \frac{1}{2}\sin y - x$, $G = \mathbb{R}^2$, $k = 2$ a $(\bar{x}, \bar{y}) = (\frac{\pi-1}{2}, \frac{\pi}{2})$. Pak
   (a) $F \in \mathcal{C}^k(G)$
   (b) $F(\frac{\pi-1}{2}, \frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{\pi}{2} = 0$
   (c) $\frac{\partial F}{\partial y} = 1 - \frac{1}{2}\cos y$, $\frac{\partial F}{\partial y}(\frac{\pi-1}{2}, \frac{\pi}{2}) = 1 \neq 0.$

   Tedy jsou splněny podmínky věty o implicitní funkci a existuje $\varepsilon > 0$ a $\delta > 0$ takové, že pro každé $x \in (\bar{x}-\varepsilon, \bar{x}+\varepsilon)$ existuje právě jedno $y \in (\bar{y}-\delta, \bar{y}+\delta)$ s vlastností $F(x, y) = 0$. Označíme-li toto y symbolem $\varphi(x)$, pak $\varphi(x) \in \mathcal{C}^2((\bar{x} - \varepsilon, \bar{x} + \varepsilon))$.
   Zderivujeme původní rovnici

$$y' - \frac{1}{2}\cos y y' = 1$$
$$y'\left(1 - \frac{1}{2}\cos y\right) = 1$$
$$y' = \frac{1}{(1 - \frac{1}{2}\cos y)}$$

Dosadíme

$$y'\left(\frac{\pi-1}{2}\right)=\frac{1}{1-0}=1$$

Pro druhou derivaci ještě jednou zderivujeme

$$y''\left(1-\frac{1}{2}\cos y\right)+y'\left(\frac{1}{2}\sin y y'\right)=0$$
$$y''=-\frac{y'\left(\frac{1}{2}\sin y y'\right)}{\left(1-\frac{1}{2}\cos y\right)}$$

Dosadíme $x=\frac{\pi-1}{2}$, $y=\frac{\pi}{2}$, $y'=1$:

$$y''=-\frac{\frac{1}{2}}{(1-0)}=-\frac{1}{2}$$

Dohromady máme: funkce y je $\mathcal{C}^2$, tedy y'' je spojitá. Navíc $y''\left(\frac{\pi-1}{2}\right)=-\frac{1}{2}<0$. Odtud máme, že existuje okolí bodu $\bar{x}$ takové, že druhá derivace je na tomto okolí záporná. Funkce je tam tedy konkávní a leží pod tečnou.

6. K rovnici $-x^2+y^2-2xy+y=0$ najděte body, v nichž jsou splněny předpoklady věty o implicitní funkci a které jsou stacionárními body takto implicitně definovaných funkcí jedné proměnné. Rozhodněte, zda jsou v těchto bodech lok. extrémy.
Zdroj příkladu: http://projects.math.slu.cz/AM/activ/soubory/opory/VybrPartCv.pdf
Řešení: Položme $F=-x^2+y^2-2xy+y$, $G=\mathbb{R}^2$, $k=2$. Máme $F\in\mathcal{C}^k(G)$.
Hledáme takové body (x,y), kde
(a) $F(x,y)=-x^2+y^2-2xy+y=0$
(b) $\frac{\partial F}{\partial y}=2y-2x+1\neq 0$
(c) $y'(0)=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}=0$, tedy $\frac{\partial F}{\partial x}=-2x-2y=0$ (stacionární body)

Ze 3. rovnice máme $y=-x$. Dosadíme do první:

$$-x^2+x^2+2x^2-x=0$$
$$x(2x-1)=0.$$

Celkem máme body $(0,0)$ a $(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$. Pro oba je navíc splněna podmínka $\frac{\partial F}{\partial y}\neq 0$. Tedy jsou v obou bodech splněny podmínky věty o implicitní funkci.
Spočteme dvě derivace.

$$-2x+2yy'-2y-2xy'+y'=0$$
$$y'(2y-2x+1)=2x+2y$$

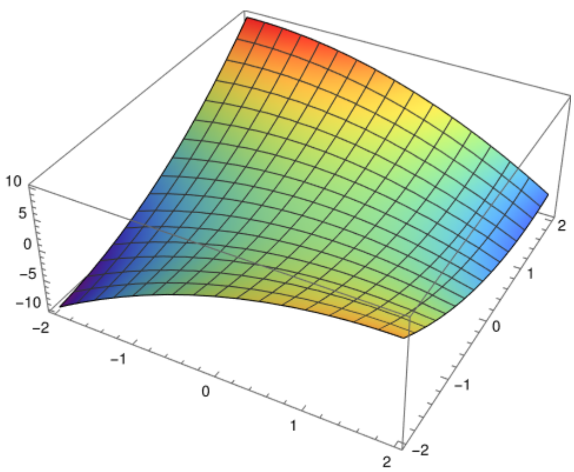
dále

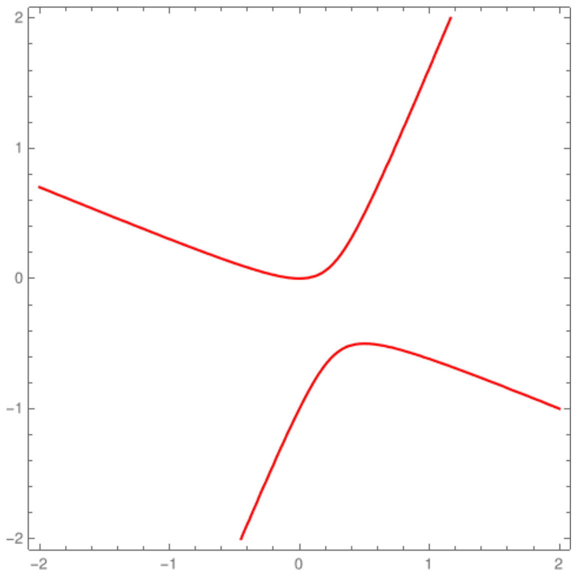
$$y''(2y-2x+1)+y'(2y'-2)=2+2y'$$
$$y''=\frac{-y'(2y'-2)+2+2y'}{(2y-2x+1)}$$

Dosadíme nalezené body (navíc máme, že $y' = 0$). Tedy

$$y''(0) = \frac{2}{1} > 0.$$
$$y''(\frac{1}{2}) = \frac{2}{-1} < 0.$$

Závěr: v bodě $(0,0)$ je lok. minimum a v bodě $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ je lok. maximum.





7. Ukažte, že rovnice $\ln(x^2z^3) = e^{z\cos y} - 1$ určuje na okolí bodu $[-1, \frac{\pi}{2}, 1]$ implicitně zadanou funkci $z(x,y)$. Vypočtěte její parciální derivace 1. řádu a určete jejich hodnotu v daném bodě.
Příklad is řešením máme z http://projects.math.slu.cz/AM/activ/soubory/opory/VybrPartCv.pdf
Řešení: Položme $F(x,y,z) = \ln(x^2z^3) - e^{z\cos y} + 1$, $G = (-\infty, 0) \times \mathbb{R} \times (0, \infty)$, $k = 1$ a $(\bar{x}, \bar{y}) = (-1, \frac{\pi}{2})$, $\bar{z} = 1$. Pak
   (a) $F \in \mathcal{C}^k(G)$,
   (b) $F(-1, \frac{\pi}{2}, 1) = \log(1) - e^{1\cdot\cos\frac{\pi}{2}} + 1 = 0$,
   (c) $\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{3}{z} - e^{z\cos y}\cos y$, $\frac{\partial F}{\partial z}(-1, \frac{\pi}{2}, 1) = 3 - e^{1\cos\frac{\pi}{2}}\cos\frac{\pi}{2} = 3 \neq 0$.

Tedy jsou splněny podmínky věty o implicitní funkci a existuje $\varepsilon > 0$ a $\delta > 0$ takové, že pro každé $(x,y) \in B((\bar{x},\bar{y}),\varepsilon)$ existuje právě jedno $z \in (\bar{z} - \delta, \bar{z} + \delta)$ s vlastností $F(x,y,z) = 0$. Označíme-li toto z symbolem $\varphi(x,y)$, pak $\varphi(x,y) \in \mathcal{C}^1(B((\bar{x},\bar{y}),\varepsilon))$.
Zderivujeme podle x a y a použijeme vzorec.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{2}{x}, \qquad \frac{\partial F}{\partial x}(-1, \frac{\pi}{2}, 1) = -2.$$

Pak

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{-2}{3} = \frac{2}{3}$$

a

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -e^{z\cos y} z(-\sin y), \qquad \frac{\partial F}{\partial y}(-1, \frac{\pi}{2}, 1) = 1.$$

Pak

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{3}$$

8. Ukažte, že rovnice $z + e^z = xy + 2$ určuje na okolí bodu $[-1, 1, 0]$ implicitně zadanou funkci $z(x, y)$. Vypočtěte její parciální derivace 1. a 2. řádu v daném bodě.
Příklad is řešením máme z http://projects.math.slu.cz/AM/activ/soubory/opory/VybrPartCv.pdf
Řešení:
   - Položme $F(x, y, z) = z + e^z - xy - 2$, $G = \mathbb{R}^3$, $k = 2$ a $(\bar{x}, \bar{y}) = (-1, 1)$, $\bar{z} = 0$. Pak
     (a) $F \in \mathcal{C}^k(G)$,
     (b) $F(-1, 1, 0) = 0 + e^0 + 1 - 2 = 0$,
     (c) $\frac{\partial F}{\partial z} = 1 + e^z$, $\frac{\partial F}{\partial z}(-1, 1, 0) = 1 + 1 \neq 0$

     Tedy jsou splněny podmínky věty o implicitní funkci a existuje $\varepsilon > 0$ a $\delta > 0$ takové, že pro každé $(x, y) \in B((\bar{x}, \bar{y}), \varepsilon)$ existuje právě jedno $z \in (\bar{z} - \delta, \bar{z} + \delta)$ s vlastností $F(x, y, z) = 0$. Označíme-li toto z symbolem $\varphi(x, y)$, pak $\varphi(x, y) \in \mathcal{C}^2(B((\bar{x}, \bar{y}), \varepsilon))$.
   - Pro zjištění derivací budeme aplikovat řetízkové pravidlo. Uvažujme rovnici

     $$z + e^z = xy + 2,$$

     kde $z = z(x, y)$ je funkce dvou proměnných. Prve derivujeme podle x.

     $$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} + e^z \cdot \frac{\partial z}{\partial x} &= y \\ \frac{\partial z}{\partial x}(1 + e^z) &= y \\ \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{y}{1 + e^z} \end{aligned}$$

     V bodě $(-1, 1, 0)$ máme

     $$\frac{\partial z}{\partial x}(-1, 1, 0) = \frac{1}{1 + e^0} = \frac{1}{2}$$

     Analogicky zderivujeme podle y.

     $$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial y} + e^z \cdot \frac{\partial z}{\partial y} &= x \\ \frac{\partial z}{\partial y}(1 + e^z) &= x \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{x}{1 + e^z} \end{aligned}$$

     V bodě $(-1, 1, 0)$ máme

     $$\frac{\partial z}{\partial y}(-1, 1, 0) = \frac{-1}{1 + e^0} = -\frac{1}{2}$$

- Analogicky postupujeme pro 2. derivace.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -y(1+e^z)^{-2}e^z \cdot \frac{\partial z}{\partial x}$$

V bodě $(-1,1,0)$ máme

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(-1,1,0) = -1(1+e^0)^{-2}e^0 \cdot \frac{\partial z}{\partial x}(-1,1,0) = -\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} = -\frac{1}{8}$$

Dále

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -x(1+e^z)^{-2}e^z \cdot \frac{\partial z}{\partial y}$$

V bodě $(-1,1,0)$ máme

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(-1,1,0) = 1(1+e^0)^{-2}e^0 \cdot \frac{\partial z}{\partial y}(-1,1,0) = \frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{8}$$

Smíšená derivace:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{(1+e^z) - y(e^z)\frac{\partial z}{\partial y}}{(1+e^z)^2}$$

V bodě $(-1,1,0)$ máme

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(-1,1,0) = \frac{(1+e^0) - 1(e^0)\frac{\partial z}{\partial y}(-1,1,0)}{(1+e^0)^2} = \frac{2+\frac{1}{2}}{4} = \frac{5}{8}$$

Navíc platí

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}(-1,1,0) = \frac{5}{8},$$

což plyne z věty o záměnnosti parciálních derivací a faktu, že $\varphi \in \mathcal{C}^2(B((\bar{x},\bar{y}),\varepsilon))$.

9. Ukažte, že rovnice $x^2+y^2+z^2+xyz = 20$ určuje na okolí bodu $[1,2,3]$ implicitně zadanou funkci $z(x,y)$. Najděte rovnici tečné roviny v daném bodě.
   Příklad is řešením máme z `http://projects.math.slu.cz/AM/activ/soubory/opory/VybrPartCv.pdf`
   Řešení: Položme $F(x,y,z) = x^2+y^2+z^2+xyz-20$, $G=\mathbb{R}^3$, $k=1$ a $(\bar{x},\bar{y}) = (1,2)$, $\bar{z}=3$. Pak
   (a) $F \in \mathcal{C}^k(G)$,
   (b) $F(1,2,3) = 1+4+9+6-20 = 0$,
   (c) $\frac{\partial F}{\partial z} = 2z+xy$ $\frac{\partial F}{\partial z}(1,2,3) = 6+2 \neq 0$.

   Tedy jsou splněny podmínky věty o implicitní funkci a existuje $\varepsilon>0$ a $\delta>0$ takové, že pro každé $(x,y)\in B((\bar{x},\bar{y}),\varepsilon)$ existuje právě jedno $z \in (\bar{z}-\delta,\bar{z}+\delta)$ s vlastností $F(x,y,z)=0$. Označíme-li toto z symbolem $\varphi(x,y)$, pak $\varphi(x,y)\in\mathcal{C}^1(B((\bar{x},\bar{y}),\varepsilon))$.
   Zderivujeme podle x a y a použijeme vzorec.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x+yz, \qquad \frac{\partial F}{\partial x}(1,2,3) = 2+6 = 8.$$

Pak
$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{8}{8} = -1$$
a
$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2y + xz, \qquad \frac{\partial F}{\partial x}(1,2,3) = 4 + 3 = 7.$$
Pak
$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{7}{8}.$$
Protože $\varphi(x,y) \in \mathcal{C}^1(B((\bar{x},\bar{y}),\varepsilon))$, tak funkce má derivaci a můžeme sestavit rovnici tečné roviny. Dostáváme
$$\begin{aligned} z - \bar{z} &= \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x},\bar{y},\bar{z})(x-\bar{x}) + \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x},\bar{y},\bar{z})(y-\bar{y}) \\ z - 3 &= -1(x-1) - \frac{7}{8}(y-2) \\ x + \frac{7}{8}y + z = \frac{23}{4} & \end{aligned}$$

Zkouškové příklady

10. Ukažte, že daná rovnice určeuje na okolí bodu $[\bar{x},\bar{y}]$ implicitně zadanou funkci (proměnné x). Spočtěte první a druhou derivaci této funkce v bodě $\bar{x}$.
   (a) $x^y + y^x = 2y, [\bar{x},\bar{y}] = [1,1]$
   Řešení: Položme $F = x^y + y^x - 2y$, $G = (0,\infty)\times(0,\infty)$, $k = 2$ a $(\bar{x},\bar{y}) = (1,1)$. Pak
      i. $F \in \mathcal{C}^k(G)$
      ii. $F(1,1) = 1 + 1 - 2 = 0$
      iii. $\frac{\partial F}{\partial y} = x^y \log x + xy^{x-1} - 2$, $\frac{\partial F}{\partial y}(1,1) = 0 + 1 - 2 = -1 \neq 0$.

   Tedy jsou splněny podmínky věty o implicitní funkci a existuje $\varepsilon > 0$ a $\delta > 0$ takové, že pro každé $x \in (\bar{x}-\varepsilon, \bar{x}+\varepsilon)$ existuje právě jedno $y \in (\bar{y}-\delta, \bar{y}+\delta)$ s vlastností $F(x,y) = 0$. Označíme-li toto y symbolem $\varphi(x)$, pak $\varphi(x) \in \mathcal{C}^2((\bar{x}-\varepsilon,\bar{x}+\varepsilon))$.
   Uvažujme původní rovnici
$$x^y + y^x = 2y$$
   neboli
$$e^{y\log x} + e^{x\log y} = 2y$$
   Zderivujme obě strany podle x a vyjádřeme y':
$$\begin{aligned} x^y\left(\frac{y}{x} + y'\log x\right) + y^x\left(\log y + \frac{x}{y}y'\right) &= 2y' \\ y'\left(x^y\log x + y^x\frac{x}{y} - 2\right) &= -x^y\frac{y}{x} - y^x\log y \end{aligned}$$
   Dosadíme $(x, y(x)) = (1,1)$ a získáme
$$\begin{aligned} y'(1)(0+1-2) &= -1 - 0 \\ y'(1) &= 1. \end{aligned}$$

Pro druhou derivaci ještě jednou zderivujeme rovnici:

$$y'\left(x^y\log x+y^x\frac{x}{y}-2\right)=-x^y\frac{y}{x}-y^x\log y$$

Tedy

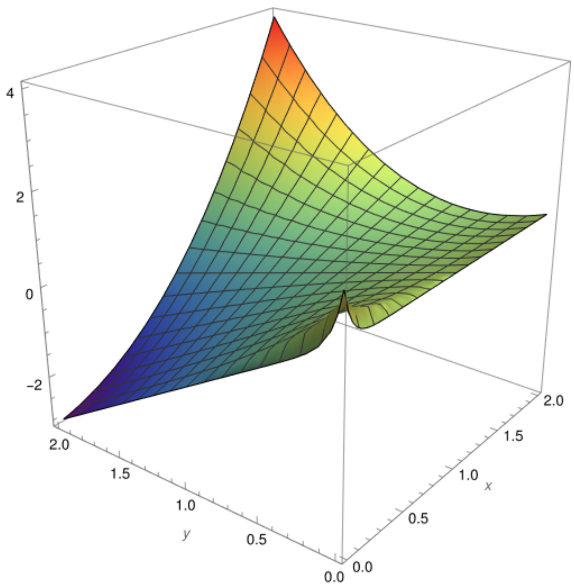
$$\begin{aligned}
&y''\left(x^y\log x+y^x\frac{x}{y}-2\right)\\
&\qquad+y'\left(x^y\left(\frac{y}{x}+y'\log x\right)\log x+\frac{x^y}{x}+y^x\left(\log y+\frac{x}{y}y'\right)\frac{x}{y}+y^x\frac{y-xy'}{y^2}\right)\\
&=-x^y\left(\frac{y}{x}+y'\log x\right)\frac{y}{x}-x^y\frac{y'x-y}{x^2}-y^x\left(\log y+\frac{x}{y}y'\right)\log y-\frac{y^x}{y}
\end{aligned}$$

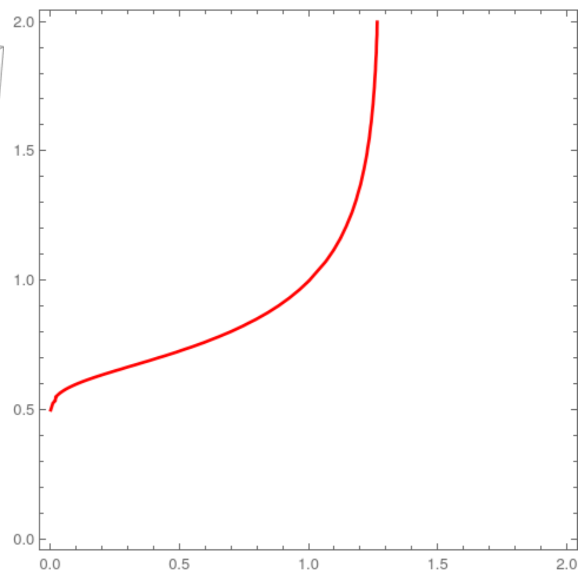
Dosadíme $x=1$, $y(1)=1$ a $y'(x)=1$.

$$y''(1)(0+1-2)+1(1(1+0))0+1+1(0+1)\cdot 1+1\cdot\frac{1-1}{1}=-1(1+0)\cdot 1-1\frac{1-1}{1}-1(0+1)\cdot 0-1$$

Tedy

$$\begin{aligned}
-y''(1)+1+1&=-1-1\\
y''(1)&=4
\end{aligned}$$





(b) $e^{\sin x^2} + e^{\sin xy} = 2y + 2, [\bar{x}, \bar{y}] = [0, 0]$
Řešení: Položme $F = e^{\sin x^2} + e^{\sin xy} - 2y - 2$, $G = \mathbb{R}^2$, $k = 2$ a $(\bar{x}, \bar{y}) = (0, 0)$. Pak

i. $F \in \mathcal{C}^k(G)$
ii. $F(0, 0) = 1 + 1 - 2 = 0$
iii. $\frac{\partial F}{\partial y} = e^{\sin xy}(\cos xy)x - 2$ $\frac{\partial F}{\partial y}(0, 0) = 1 \cdot 1 \cdot 0 - 2 = -2 \neq 0$.

Tedy jsou splněny podmínky věty o implicitní funkci a existuje $\varepsilon > 0$ a $\delta > 0$ takové, že pro každé $x \in (\bar{x} - \varepsilon, \bar{x} + \varepsilon)$ existuje právě jedno $y \in (\bar{y} - \delta, \bar{y} + \delta)$ s vlastností $F(x, y) = 0$. Označíme-li toto y symbolem $\varphi(x)$, pak $\varphi(x) \in \mathcal{C}^2((\bar{x} - \varepsilon, \bar{x} + \varepsilon))$.
Uvažujme původní rovnici

$$e^{\sin x^2} + e^{\sin xy} = 2y + 2$$

Zderivujme obě strany podle x a vyjádřeme y':

$$e^{\sin x^2} \cos(x^2)2x + e^{\sin xy} \cos(xy)(y + xy') = 2y'$$

Dosadíme $(x, y(x)) = (0, 0)$ a získáme

$$e^0 \cos(0) \cdot 0 + e^0 \cos 0(0 + 0) = 2y'(0)y'(0) = 0.$$

Pro druhou derivaci ještě jednou zderivujeme rovnici:

$$e^{\sin x^2} \cos(x^2)2x + e^{\sin xy} \cos(xy)(y + xy') = 2y'$$

Tedy

$$\begin{aligned} &e^{\sin x^2}(\cos(x^2)2x)^2 + e^{\sin x^2}(-\sin(x^2)4x^2 + \cos(x^2) \cdot 2) \\ &\quad + e^{\sin xy}(\cos(xy)(y + xy'))^2 + e^{\sin xy}(-\sin(xy)(y + xy')^2 + \cos(xy)(y' + y' + xy'')) = 2y'' \end{aligned}$$

Dosadíme $x = 0$, $y(0) = 0$ a $y'(x) = 0$.

$$2 + = 2y''$$

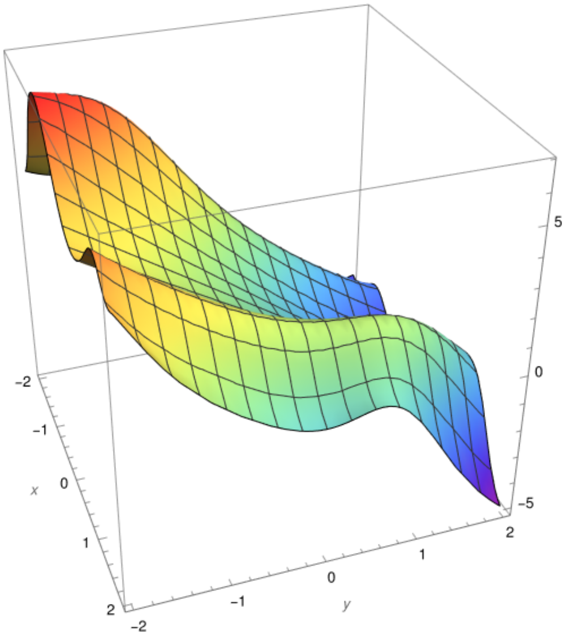
Tedy

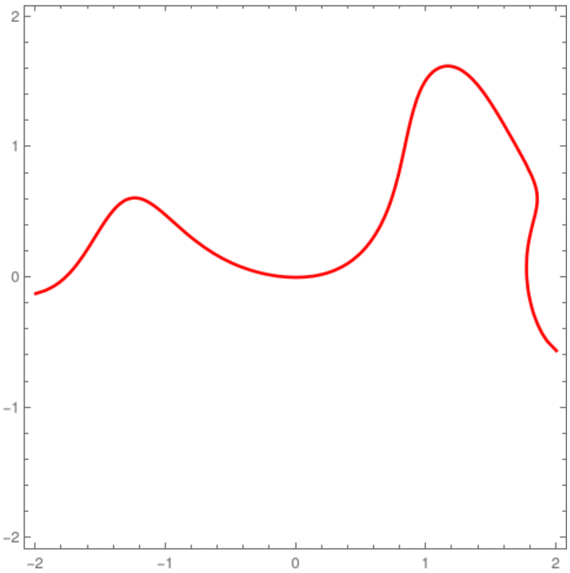
$$y''(0) = 1$$

(c) $\pi/2 + \arcsin(x + y^2) = \arccos(y + x^2), [\bar{x}, \bar{y}] = [0, 0]$
Řešení: Položme $F = \pi/2 + \arcsin(x + y^2) - \arccos(y + x^2)$, $G = (-\frac{1}{2}) \times (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ (lze vykoukat z obrázku) , $k = 2$ a $(\bar{x}, \bar{y}) = (0, 0)$.
Pak

i. $F \in \mathcal{C}^k(G)$
ii. $F(0, 0) = \frac{\pi}{2} + 0 - \frac{\pi}{2} = 0$
iii. $\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{1-(x+y^2)^2}} + \frac{2x}{\sqrt{1-(y+x^2)^2}}$, $\frac{\partial F}{\partial y}(0, 0) = 1 + 0 = 1 \neq 0$.

Tedy jsou splněny podmínky věty o implicitní funkci a existuje $\varepsilon > 0$ a $\delta > 0$ takové, že pro každé $x \in (\bar{x} - \varepsilon, \bar{x} + \varepsilon)$ existuje právě jedno $y \in (\bar{y} - \delta, \bar{y} + \delta)$ s vlastností $F(x, y) = 0$. Označíme-li toto y symbolem $\varphi(x)$, pak $\varphi(x) \in \mathcal{C}^2((\bar{x} - \varepsilon, \bar{x} + \varepsilon))$.





Uvažujme původní rovnici

$$\pi/2 + \arcsin(x + y^2) = \arccos(y + x^2)$$

Zderivujme obě strany podle x a vyjádřeme y':

$$\frac{1 + 2yy'}{\sqrt{1 - (x + y^2)^2}} = -\frac{y' + 2x}{\sqrt{1 - (y + x^2)^2}}$$

Dosadíme $(x, y(x)) = (0, 0)$ a získáme

$$\begin{aligned} 1 &= -y'(0) \\ -1 &= y'(0) \end{aligned}$$

Pro druhou derivaci ještě jednou zderivujeme rovnici:

$$\frac{1 + 2yy'}{\sqrt{1 - (x + y^2)^2}} = -\frac{y' + 2x}{\sqrt{1 - (y + x^2)^2}}$$

Tedy

$$(2y'y' + 2yy'')(1 - (x + y^2)^2)^{-\frac{1}{2}} + (1 + 2yy') \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)(1 - (x + y^2))^{-\frac{3}{2}}(-2(x + y^2)(1 + 2yy'))$$

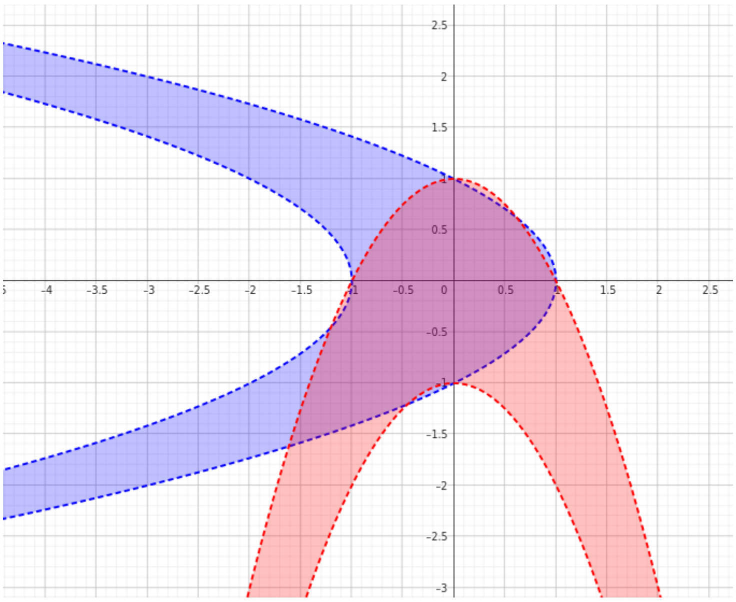
$$= -(y'' + 2)(1 - (y + x^2)^2)^{-\frac{1}{2}} - (y' + 2x) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)(1 - (y + x^2))^{-\frac{3}{2}}(-2(y + x^2)(y' + 2x))$$

Dosadíme $x = 0$, $y(0) = 0$ a $y'(0) = -1$.

$$2 = -(y'' + 2)$$

Tedy

$$y''(0) = -4$$



(d) $\arctan(y^2 + xy) = e^{xy} - \cos x + y, [\bar{x}, \bar{y}] = [0, 0]$
Řešení: Položme $F = \arctan(y^2 + xy) - e^{xy} + \cos x - y$, $G = \mathbb{R}^2$, $k = 2$ a $(\bar{x}, \bar{y}) = (0, 0)$. Pak

i. $F \in \mathcal{C}^k(G)$

ii. $F(0,0) = 0 - 1 + 1 - 0 = 0$

iii. $\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{2y+x}{1+(y^2+xy)^2} - e^{xy}x - 1$, $\frac{\partial F}{\partial y}(0,0) = 0 - 0 - 1 = -1 \neq 0$.

Tedy jsou splněny podmínky věty o implicitní funkci a existuje $\varepsilon > 0$ a $\delta > 0$ takové, že pro každé $x \in (\bar{x} - \varepsilon, \bar{x} + \varepsilon)$ existuje právě jedno $y \in (\bar{y} - \delta, \bar{y} + \delta)$ s vlastností $F(x, y) = 0$. Označíme-li toto y symbolem $\varphi(x)$, pak $\varphi(x) \in \mathcal{C}^2((\bar{x} - \varepsilon, \bar{x} + \varepsilon))$.
Uvažujme původní rovnici

$$\arctan(y^2 + xy) = e^{xy} - \cos x + y$$

Zderivujme obě strany podle x a vyjádřeme y':

$$\frac{2yy' + y + xy'}{1 + (y^2 + xy)^2} = e^{xy}(y + xy') + \sin x + y'$$

Dosadíme $(x, y(x)) = (0, 0)$ a získáme

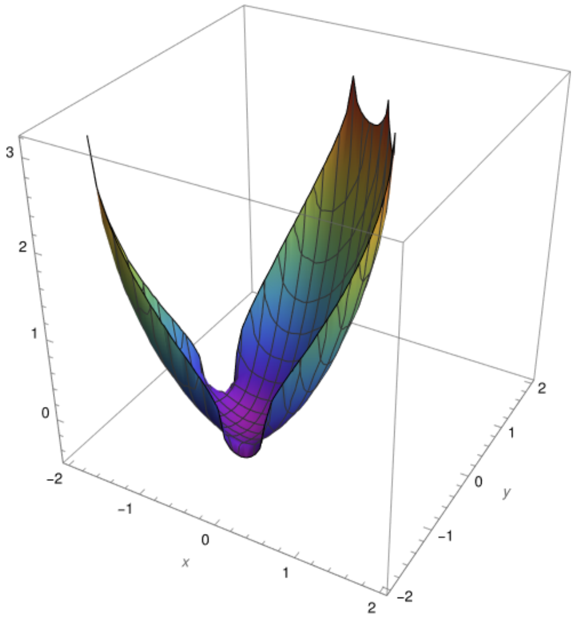
$$0 = y'(0)$$

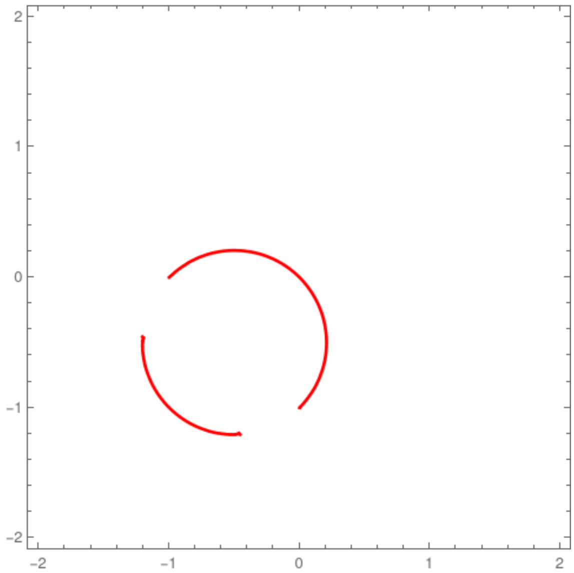
Pro druhou derivaci ještě jednou zderivujeme rovnici:

$$\frac{2yy' + y + xy'}{1 + (y^2 + xy)^2} = e^{xy}(y + xy') + \sin x + y'$$

Tedy

$$\frac{(2y'y' + 2yy'' + y' + y' + xy'')(1 + (y^2 + xy)^2) - (2yy' + y + xy')(2(y^2 + xy)(2yy' + y + xy'))}{(1 + (y^2 + xy)^2)^2}$$
$$= e^{xy}(y + xy')^2 + e^{xy}(y' + y' + xy'') + \cos x + y''$$



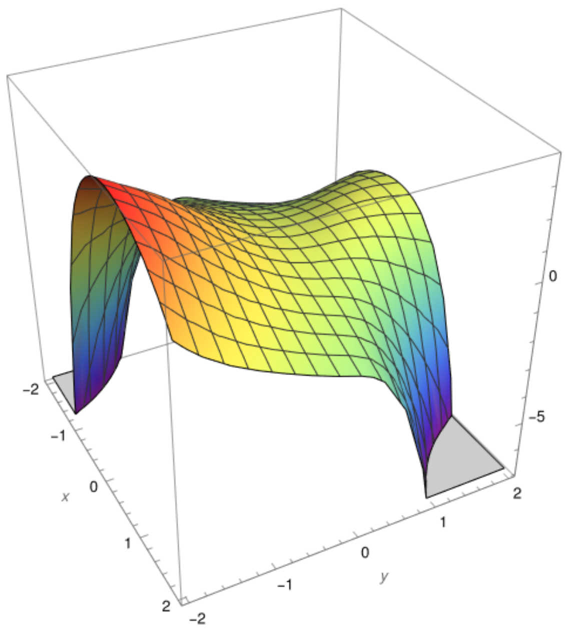


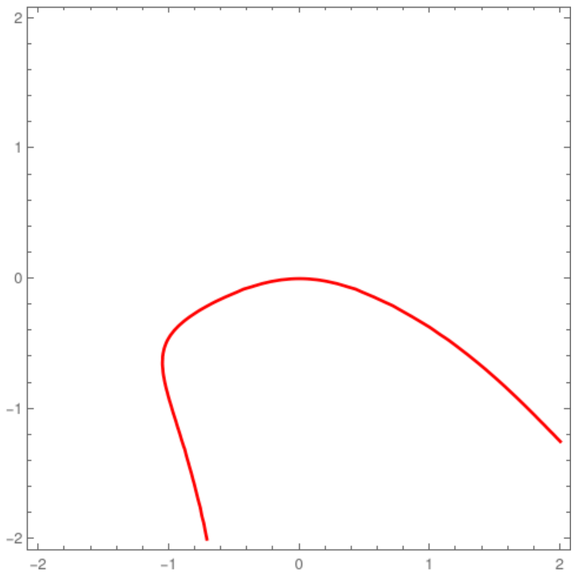
Dosadíme $x = 0$, $y(0) = 0$ a $y'(0) = 0$.

$$0 = 1 + y''$$

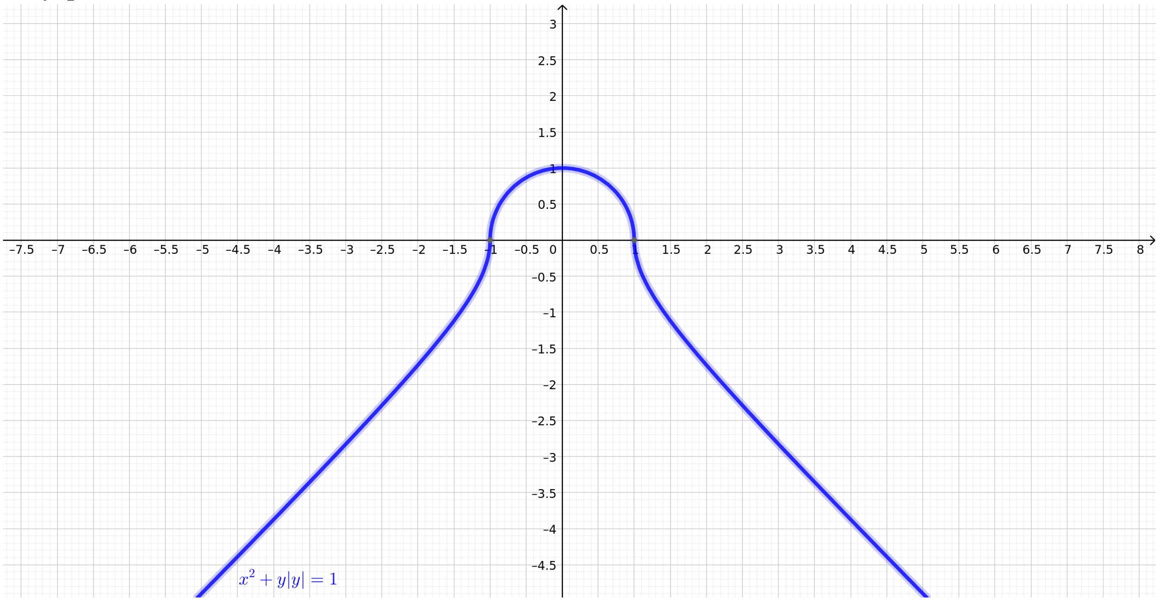
Tedy

$$y''(0) = -1$$





Teorie

11. Rozhodněte, zda je podmínka $\frac{\partial F}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y}) \neq 0$ ve větě o implicitní funkci nutná. Dokážete sestrojit funkci (alespoň obrázkem), u níž platí všechny předpoklady až na tento, a přesto platí závěr?
Řešení: Např. funkci $y = \sqrt[3]{x}$ lze nanpsat i jako implicitní funkci k rovnici $y^3 = x$. Pak v bodě $(0, 0)$ není splněna podmínka nenulové derivace, přesto jde zjevně o funkci.
Jiný příklad na obrázku


12. Sestrojte funkci $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, která je parciálně spojitá, ale není spojitá.
Řekneme, že f je parciálně spojitá, pokud pro každé $x_0 \in \mathbb{R}$ je funkce $g(y) = f(x_0, y)$ spojitá na $\mathbb{R}$ (jakožto funkce 1 proměnné), a pro každé $y_0 \in \mathbb{R}$ je funkce $h(x) = f(x, y_0)$ spojitá na $\mathbb{R}$.
Řešení: Položme
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$
Pak na $\mathbb{R}^2 \setminus [0, 0]$ je f spojitá - podle aritmetiky a spojitosti.
V počátku platí: $f(0, y) = 0$ a $f(x, 0) = 0$, tedy je parciálně spojitá.
Ale pro $f(x, x) = \frac{xx}{x^2+x^2} = \frac{1}{2}$, tedy f jako taková spojitá není.

13. Sestrojte funkci $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, která má v bodě $[0, 0]$ derivaci ve všech směrech $D_v f(0, 0)$, ale není v bodě $[0, 0]$ spojitá.
Řešení: Položme
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$
Derivace v počátku ve směru $v = (v_1, v_2)$ spočteme z definice
$$D_v(f) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0+tv) - f(0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{tv_1(tv_2)^2}{(tv_1)^2+(tv_2)^4}}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{v_1 v_2^2}{v_1^2 + t^2 v_2^4} = \begin{cases} \frac{v_2^2}{v_1}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Ale $f(x^2, x) = \frac{1}{2}$, tedy f není v $[0, 0]$ spojitá.
Jiný příklad: Nechť $f(x, y) = 1$, jestliže $y = x^2$, kde $x \neq 0$, v ostatních případech nechť je $f(x, y) = 0$.
Pak funkce je v počátku nespojitá, ale všechny směrové derivace existují a jsou 0.

14. Sestrojte funkci $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, která má v bodě $[0, 0]$ derivaci ve všech směrech $D_v f(0, 0)$, ale neexistuje totální diferenciál $Df([0, 0])$.
Řešení: Jako předchozí příklad. Není-li totiž f spojitá, nemůže mít totální diferenciál.