



### 13. cvičení – Extrémy a nekompakty

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, [kuncova@karlin.mff.cuni.cz](mailto:kuncova@karlin.mff.cuni.cz)

#### Příklady

1. Najděte globální extrémy funkcí (nebo supremum a infimum):

(a)  $f(x, y) = x^3 - 3xy + y^3$ ,  $M = [0, \infty)^2$ .

**Řešení:** Zdroj příkladu: <https://matematika.cuni.cz/dl/ikalkulus/KAP17.pdf>

- Nejprve zkusíme najít lokální extrémy na množině  $M^\circ = (0, \infty)^2$ . Zderivujeme

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= 3x^2 - 3y \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 3y^2 - 3x\end{aligned}$$

Nulové body: Z druhé rovnice je

$$x = y^2,$$

tedy po dosazení do první

$$\begin{aligned}3y^4 - 3y &= 0 \\ y(y^3 - 1) &= 0\end{aligned}$$

Tedy máme dva podezřelé body:  $[0, 0] \notin M^\circ$  a  $[1, 1]$ . Platí  $f(1, 1) = -1$ .

- Globální maximum funkce nemá: Uvažujme funkci  $g(x) = f(x, 0)$ . Pak

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^3 = \infty.$$

Tedy funkce je zřejmě neomezená shora.

- Globální minimum je v bodě  $[1, 1]$ : Ukážeme, že na množině  $K = [0, 3]^2$  je globální minimum v bodě  $[1, 1]$ . Dále ukážeme, že  $f \geq 0$  na množině  $M \setminus K$ . Z toho pak vyplýne, že v  $[1, 1]$  je globální minimum na  $M$ .

- Množina  $K$  je omezená a uzavřená, tedy kompaktní. Protože  $f$  je spojitá (polynom), tak na  $K$  nabývá (globálních) extrémů. Minimum může být pouze v bodě  $[1, 1]$  (s hodnotou  $f(1, 1) = -1$ ) nebo na hranici. Hranice je tvořena čtyřmi úsečkami. Na úsečce  $(x, 0)$ , kde  $x \in [0, 3]$ , a na úsečce  $(0, y)$ , kde  $y \in [0, 3]$ , platí  $f(x, 0) = x^3 \geq 0$  a  $f(0, y) = y^3 \geq 0$ . Tedy tam nemůže být minimum.

Úsečky tvaru  $(x, 3)$ , kde  $x \in [0, 3]$ , a  $(3, y)$ , kde  $y \in [0, 3]$ , budeme diskutovat níže.

- Uvažujme množinu  $x \geq 3, y \leq 3$ . Pak

$$f(x, y) = x^3 - 3xy + y^3 \geq x^3 - 3xy \geq 3x(3 - y) \geq 0.$$

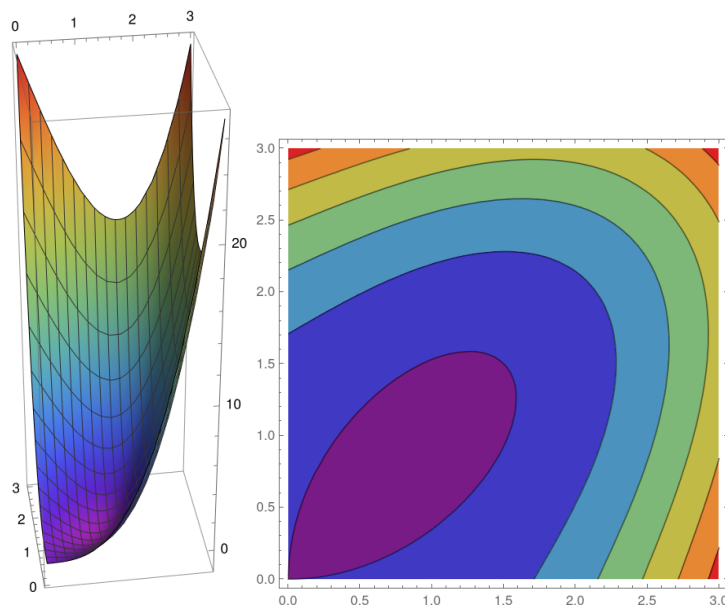
Analogicky pro  $y \geq 3, x \leq 3$ :

$$f(x, y) = x^3 - 3xy + y^3 \geq y^3 - 3xy \geq 3y(3 - x) \geq 0.$$

Nakonec pro množinu  $x \geq 3, y \geq 3$  je

$$f(x, y) = x^3 - 3xy + y^3 \geq 3(x^2 - xy + y^2) = 3((x - y)^2 + xy) \geq 0.$$

- Tedy minimum na množině  $K$  je v bodě  $[1, 1]$  a má hodnotu  $-1$ . Na  $M \setminus K$  platí, že  $f(x, y) \geq 0$ .
- Závěr: globální maximum funkce nemá, globální minimum je v bodě  $[1, 1]$  a má hodnotu  $-1$ .



(b)  $f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)}$

**Řešení:** Zdroj příkladu: <https://www.karlin.mff.cuni.cz/~bouchala/Vyuka/>

Hledáme globální extrémy na množině  $M = \mathbb{R}^2$ .

Funkci lze psát jako  $f(x, y) = g(x^2 + y^2)$ , pro  $g(t) = te^{-t}$ . (Vrstevnicemi funkce jsou kružnice se středem v počátku.)

Stačí tedy vyšetřit extrémy funkce  $g(t)$ ,  $t \in [0, \infty)$ .

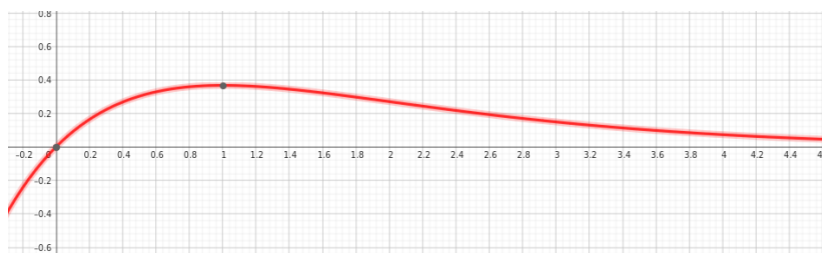
Zderivujme:

$$g'(t) = e^{-t}(1 - t).$$

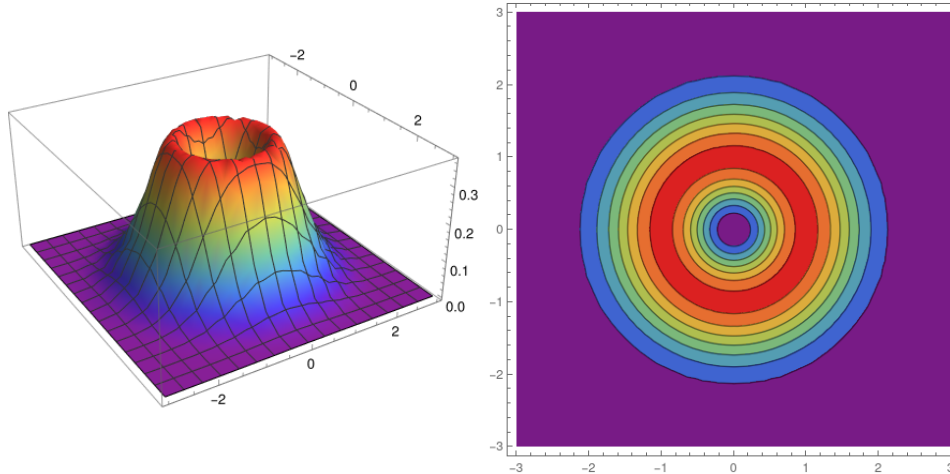
Funkce je tedy rostoucí na intervalu  $[0, 1)$  a klesající na  $[1, \infty)$ . Navíc platí  $g(0) = 0$  a

$$\lim_{t \rightarrow \infty} te^{-t} = 0.$$

Můžeme tedy funkci načrtnout a říct, že má globální maximum v  $t = 1$  o hodnotě  $1/e$  a minimum v  $t = 0$  o hodnotě  $0$ .



Přechodem k funkci  $f$  určíme, že  $f$  má globální maximum na kružnici  $x^2 + y^2 = 1$  a minimum v počátku.



(c)  $f(x, y) = (x^2 + 7y^2)e^{-5x^2 - 2y^2}$

**Řešení:** Zdroj: Petr Holický, Ondřej F.K. Kalenda : Metody řešení vybraných úloh z matematické analýzy pro 2. - 4. semestr

- Funkce  $f$  je zřejmě nezáporná a zároveň  $f(x, y) = 0$  právě pro  $(x, y) = (0, 0)$ . Zde je tedy globální minimum.
- Funkci zderivujeme

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (2x - 10x(x^2 + 7y^2))e^{-5x^2 - 2y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = (14y - 4y(x^2 + 7y^2))e^{-5x^2 - 2y^2}$$

Derivace jsou nulové právě tehdy, když

$$x(1 - 5(x^2 + 7y^2)) = 0$$

$$y(14 - 4(x^2 + 7y^2)) = 0$$

Z rovnic dostáváme řešení

- $[0, 0]$ ,  $f(0, 0) = 0$ ,
- $[0, \pm 1/\sqrt{2}]$ ,  $f(0, \pm 1/\sqrt{2}) = \frac{7}{2e}$ ,
- $[\pm 1/\sqrt{5}, 0]$ ,  $f(\pm 1/\sqrt{5}, 0) = \frac{1}{5e}$ .

Kandidátem na globální maximum jsou tedy body  $[0, \pm 1/\sqrt{2}]$ , s hodnotou  $f(0, \pm 1/\sqrt{2}) = \frac{7}{2e}$ .

- Ukážeme, že opravdu jde o body globálního maxima. Pro funkci  $f$  platí

$$f(x, y) = (x^2 + 7y^2)e^{-5x^2 - 2y^2} \leq 7(5x^2 + 2y^2)e^{-5x^2 - 2y^2}$$

Podobně jako v předchozím příkladě můžeme psát  $h(x, y) = 7(5x^2 + 2y^2)e^{-5x^2 - 2y^2}$  jako  $h(x, y) = g(5x^2 + 2y^2)$ , kde  $g(t) = 7te^{-t}$ .

Máme  $\lim_{t \rightarrow \infty} te^{-t} = 0$ . Tedy existuje  $R > 0$  takové, že pro  $t \geq R$  platí  $g(t) < \frac{7}{4e}$ .

Uvažujme tedy množinu  $K = \{[x, y] : 5x^2 + 2y^2 \leq R\}$  a množinu  $\widehat{K} = \{[x, y] : 5x^2 + 2y^2 \geq R\}$ .

– Pak na  $\widehat{K}$  platí

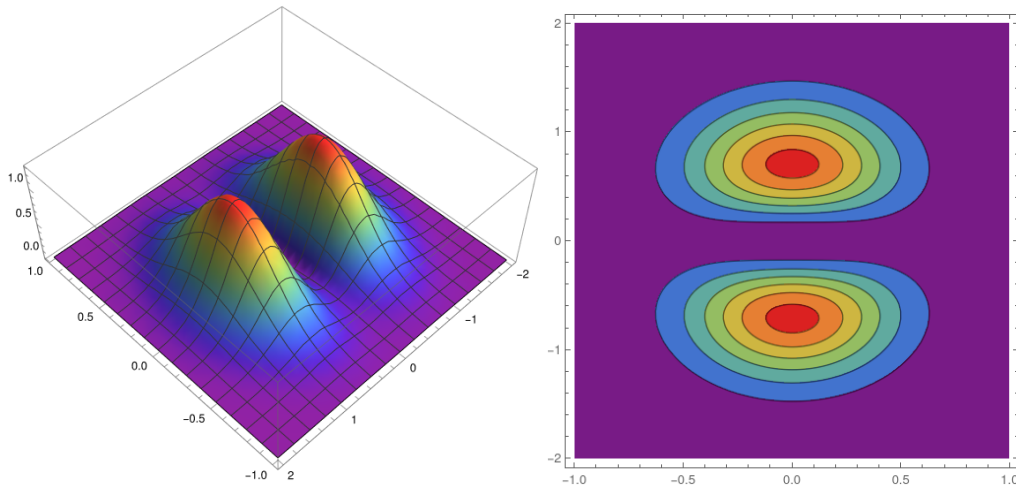
$$f(x, y) \leq h(x, y) < \frac{7}{4e}.$$

– Na množině  $K$  máme:  $K$  je kompakt (elipsa se středem v počátku) a  $f$  je na  $K$  spojitá. Nabývá tam tedy extrémů.

Globální maximum může být pouze v bodech  $[0, \pm 1/\sqrt{2}]$ , s hodnotou  $f(0, \pm 1/\sqrt{2}) = \frac{7}{2e}$ , nebo na hranici  $K$ . Ale pro body na hranici  $K$  platí, že  $f < \frac{7}{4e}$ .

Závěr: Funkce  $f$  nabývá globálního maxima v bodech  $[0, \pm 1/\sqrt{2}]$ , s hodnotou  $f(0, \pm 1/\sqrt{2}) = \frac{7}{2e}$ .

Globálního minima nabývá v bodě  $[0, 0]$  s hodnotou 0.



(d)  $f(x, y) = 3x + \frac{4y}{x^2} + \frac{27}{y^3}$ ,  $M = (0, \infty)^2$

**Řešení:** Zdroj příkladu: <https://matematika.cuni.cz/dl/ikalkulus/KAP17.pdf>

- Funkce je na  $M$  nezáporná. Zároveň je shora neomezená, protože

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x, 1) = \lim_{x \rightarrow \infty} 3x + \frac{4}{x^2} + 27 = \infty.$$

- Zderivujme

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 3 - \frac{8y}{x^3} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{4}{x^2} - \frac{81}{y^4} \end{aligned}$$

Jediným stacionárním bodem je bod  $[2, 3]$ , kde  $f(2, 3) = 10$ .

- Ukážeme, že v tomto bodě je globální minimum. Uvažujme množinu  $K = [\frac{3}{5}, 4] \times [1, 40]$ . Pak máme

– Pro  $x \geq 4$  je

$$f(x, y) > 3x \geq 12 > 10.$$

– Pro  $x \in (0, 4], y \geq 40$  je

$$f(x, y) > \frac{4y}{x^2} \geq \frac{y}{4} \geq 10$$

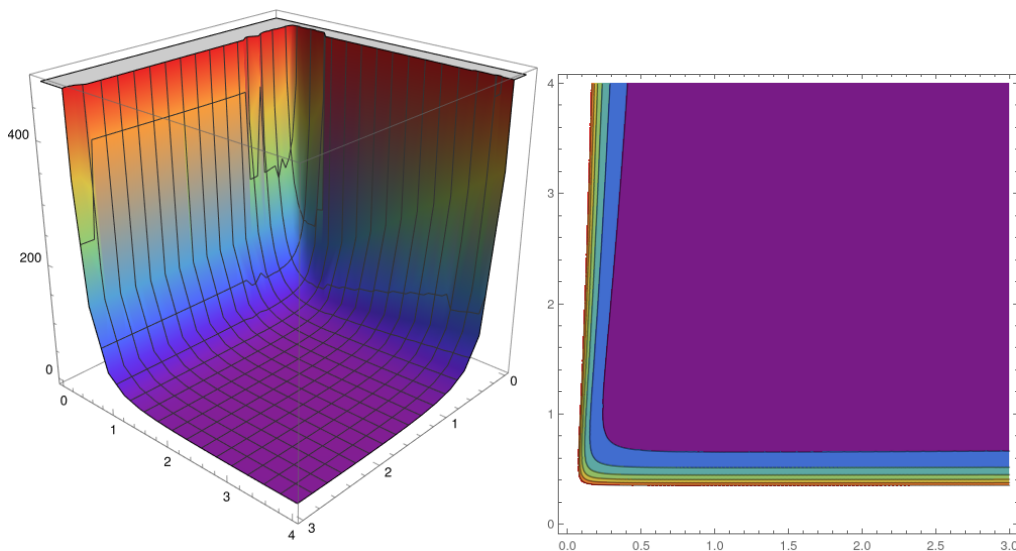
– Pro  $y \in (0, 1]$  je

$$f(x, y) > \frac{27}{y^3} \geq 10$$

– Pro  $y \geq 1, x \in (0, \frac{3}{5}]$  je

$$f(x, y) > \frac{4y}{x^2} \geq \frac{4}{x^2} \geq 10$$

Závěr: Globální minimum je v bodě  $[2, 3]$  s hodnotou  $f(2, 3) = 10$ .



(e)  $f(x, y) = (7x + 10y)e^{-x-y}, x > 0, y > 0$ .

**Řešení:**

Zdroj: Petr Holický, Ondřej F.K. Kalenda : Metody řešení vybraných úloh z matematické analýzy pro 2. - 4. semestr

Položme  $M = (0, \infty) \times (0, \infty)$ .

- Zderivujeme:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (-7x - 10y + 7)e^{-x-y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = (-7x - 10y + 10)e^{-x-y}$$

Stacionární bod funkce nemá.

- Protože  $f$  je spojitá na  $\overline{M}$ , tak  $\sup f(M) = \sup f(\overline{M})$  a  $\inf f(M) = \inf f(\overline{M})$ . Budeme tedy dále pracovat na  $\overline{M} = [0, \infty) \times [0, \infty)$ .

Zřejmě  $f \geq 0$  na  $\overline{M}$ . Navíc  $f(x, y) = 0$  právě pro  $(x, y) = (0, 0)$ . Tedy v počátku má  $f$  globální minimum.

Pro  $M$  pak platí  $\inf f(M) = 0$ .

- Vyšetříme chování  $f$  na hranici  $M$ .

- Máme  $f(0, 0) = 0$ .
- Na  $(x, 0)$ , kde  $x > 0$  je

$$f(x, 0) = h_1(x) = 7xe^{-x}$$

Je

$$h_1'(x) = 7(1 - x)e^{-x}.$$

Podezřelým bodem je tedy  $[1, 0]$  s hodnotou  $f(1, 0) = 7/e$ .

- Na  $(0, y)$ , kde  $y > 0$  je

$$f(0, y) = h_2(y) = 10ye^{-y}$$

Je

$$h_2'(y) = 10(1 - y)e^{-y}.$$

Podezřelým bodem je tedy  $[0, 1]$  s hodnotou  $f(0, 1) = 10/e$ .

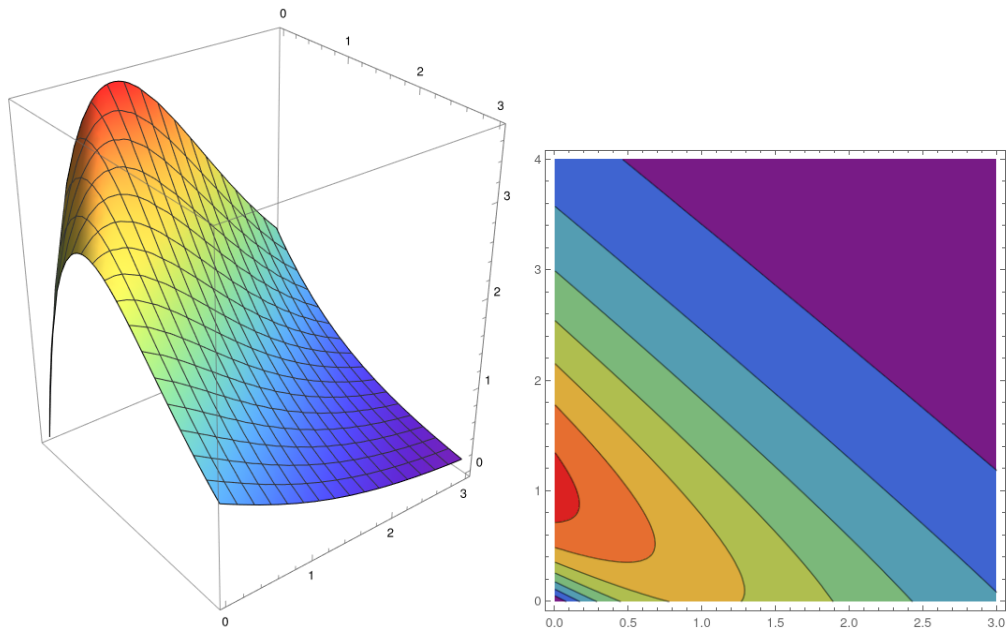
- Ukážeme že  $f$  nabývá maxima na  $\overline{M}$  bodě  $[0, 1]$  s hodnotou  $10/e$ .
  - Platí odhad

$$f(x, y) \leq 10(x + y)e^{-x-y}$$

Můžeme psát jako  $10(x + y)e^{-x-y} = g(x + y)$ , kde  $g(t) = 10te^{-t}$ . Protože  $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = 0$ , tak existuje takové  $R > 0$ , že pro  $t \geq R$  je  $10te^{-t} < \frac{5}{e}$ . Neboli  $f(x, y) < \frac{5}{e}$  na množině  $\{[x, y] : x \geq 0, y \geq 0, x + y \geq R\}$ .

- Uvažujme nyní množinu  $A = \{[x, y] : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq R\}$ . Jde o trojúhelník, množina je omezená a uzavřená, tedy kompaktní. Funkce  $f$  na ní tedy nabývá extrémů. Zřejmě  $[0, 0] \in A$  i  $[0, 1] \in A$ . Z výpočtů výše plyne, že extrémy jsou v bodech  $[0, 0]$  a  $[0, 1]$ .

Závěr:  $\inf f(M) = 0$ ,  $\sup f(M) = \frac{10}{e}$ . Funkce na  $M$  nenabývá extrémů.



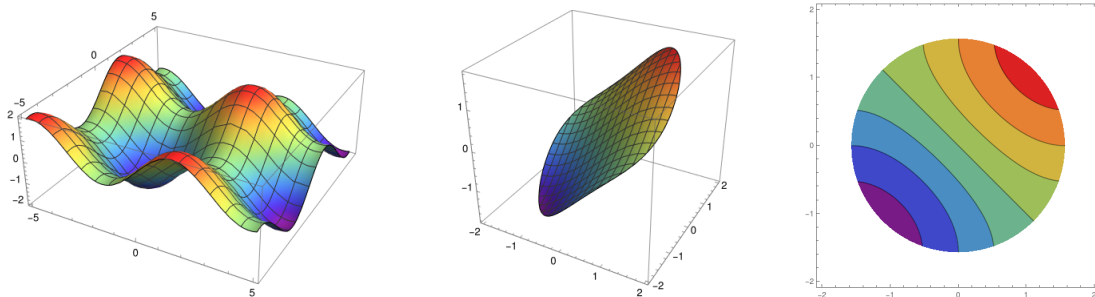
2. Najděte globální extrémů funkcí (nebo supremum a infimum):

Zdroj příkladů: Petr Holický, Ondřej F.K. Kalenda : Metody řešení vybraných úloh z matematické analýzy pro 2. - 4. semestr

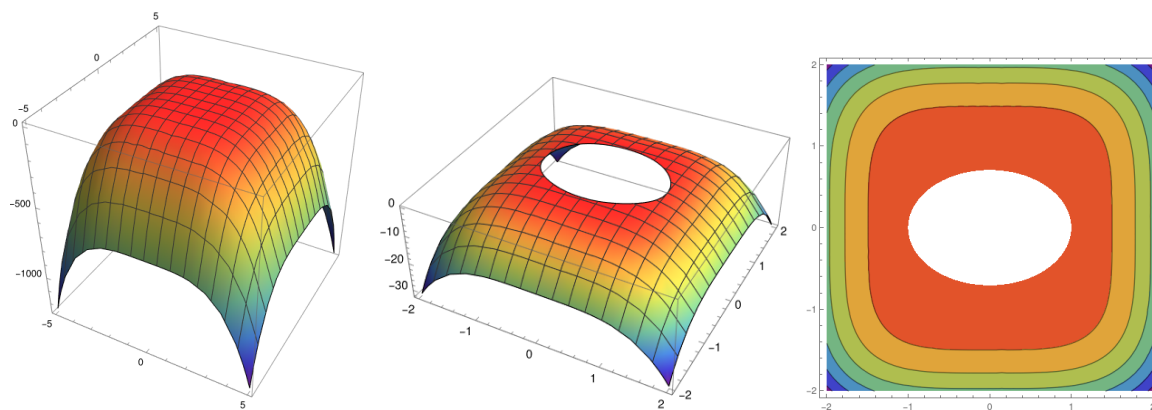
<https://www.karlin.mff.cuni.cz/~bouchala/Vyuka/>

- (a)  $f(x, y) = \sin x + \sin y$ ,  $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < \pi^2/4\}$
- (b)  $f(x, y, z) = \sin x \sin y \sin z$ ,  $M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = \frac{\pi}{2}, x > 0, y > 0, z > 0\}$
- (c)  $f(x, y) = x - y + 2z$ ,  $M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 2, x^2 + z^2 < y\}$
- (d)  $f(x, y) = x + y + z$ ,  $M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 1, x^2 + y^2 + z^2 - 2x < 0\}$
- (e)  $f(x, y) = -x^4 - y^4$ ,  $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2y^2 > 1\}$

Příklad (2a)



Příklad (2e)





(i)  $x = 0$  a  $y = 0$  – tím dostaneme již známý bod minima  $(0, 0)$ .

(ii)  $x = 0$  a  $14 - 4(x^2 + 7y^2) = 0$  – odtud dostaneme dva body  $(0, 1/\sqrt{2})$  a  $(0, -1/\sqrt{2})$ . V obou je hodnota  $f$  rovna  $\frac{7}{2e}$ .

(iii)  $2 - 10(x^2 + 7y^2) = 0$  a  $y = 0$  – odtud dostaneme dva body  $(1/\sqrt{5}, 0)$  a  $(-1/\sqrt{5}, 0)$ . V obou je hodnota  $f$  rovna  $\frac{1}{3e}$ .

(iv)  $2 - 10(x^2 + 7y^2) = 0$  a  $14 - 4(x^2 + 7y^2) = 0$  – tento případ však nemůže nastat, protože výraz  $x^2 + 7y^2$  nemůže být zároveň  $1/5$  i  $7/2$ .

Nyní porovnáním výsledků dostaneme, že funkce  $f$  nabývá maxima  $\frac{7}{2e}$  v bodech  $(0, 1/\sqrt{2})$  a  $(0, -1/\sqrt{2})$ . ■

**§70.** Pokud funkce extrémů nenabývá, nebo alespoň nevíme předem, zda nabývá, hledáme supremum a infimum. Přitom nám někdy může pomoci následující pozorování.

*Nechť funkce  $f$  je spojitá na  $\overline{M}$ . Pak  $\sup f(M) = \sup f(\overline{M})$  a  $\inf f(M) = \inf f(\overline{M})$ .*

Toto se hodí například v případě, že množina  $M$  je omezená. Pak totiž její uzávěr je kompaktní, a je-li  $f$  na  $\overline{M}$  spojitá, pak můžeme na  $\overline{M}$  najít extrémy, a tím určíme supremum a infimum na  $M$ .

*2a* **Příklad** Najděte supremum a infimum funkce  $f(x, y) = \sin x + \sin y$  na množině  $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < \pi^2/4\}$ . Existuje minimum a maximum funkce  $f$  na  $M$ ?

*Řešení.* Množina  $M$  je otevřená a  $f$  má všude na  $M$  parciální derivace. Pokud tedy má  $f$  extrém v nějakém bodě  $M$ , musí v něm být parciální derivace prvního řádu nulové, tj.  $\cos x = 0$  a  $\cos y = 0$ . To splňují body tvaru  $(\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + l\pi)$ ,  $k, l \in \mathbb{Z}$ . Žádný z těchto bodů ovšem v  $M$  neleží. Proto  $f$  na  $M$  extrémů nenabývá.

Nicméně funkce  $f$  je spojitá na celém  $\mathbb{R}^2$  a  $\overline{M}$  je kompaktní ( $M$  je otevřený kruh o středu  $0$  a poloměru  $\pi/2$ ,  $\overline{M}$  je příslušný uzavřený kruh). Proto  $f$  nabývá extrémů na  $\overline{M}$ . Protože v  $M$  extrémy nemá, nabývá jich na hranici, tj. na množině  $\partial M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = \pi^2/4\}$ . (Jelikož  $M$  je otevřená, je  $\partial M = \overline{M} \setminus M$ .) To je kružnice, a tedy bychom ji mohli parametrizovat jako v §67. Tento postup necháváme na čtenáři, zde použijeme metodu Lagrangeových multiplikátorů z §68.

Funkce  $g(x, y) = x^2 + y^2 - \pi^2/4$  je třídy  $C^1$  na  $\mathbb{R}^2$ , její parciální derivace jsou  $\frac{\partial g}{\partial x} = 2x$  a  $\frac{\partial g}{\partial y} = 2y$ . Obě jsou nulové pouze v bodě  $(0, 0)$ , který neleží v  $\partial M$ . Proto, má-li funkce  $f$  v nějakém bodě  $\partial M$  lokální extrém (vzhledem k  $\partial M$ ), existuje  $\lambda \in \mathbb{R}$ , pro které platí:

$$\begin{aligned}\cos x + \lambda \cdot 2x &= 0, \\ \cos y + \lambda \cdot 2y &= 0, \\ x^2 + y^2 - \pi^2/4 &= 0.\end{aligned}$$

Z prvních dvou rovnic dostáváme, že  $y \cos x - x \cos y = 0$ . Všimněme si, že nemůže být  $x = 0$  ani  $y = 0$ . Jinak by totiž nebyla splněna první nebo druhá rovnice. Proto

rovnici můžeme upravit na tvar  $\frac{\cos x}{x} = \frac{\cos y}{y}$ . Přitom  $(\frac{\cos t}{t})' = \frac{-(\sin t) \cdot t - \cos t}{t^2}$ . Proto je funkce  $t \mapsto \frac{\cos t}{t}$  klesající na  $(0, \pi/2]$  i na  $[-\pi/2, 0)$ . Protože navíc pro  $t \in (0, \pi/2]$  je  $\frac{\cos t}{t} > 0$  a pro  $x \in [-\pi/2, 0)$  je  $\frac{\cos x}{x} < 0$ , je tato funkce prostá na  $[-\pi/2, \pi/2] \setminus \{0\}$ . Jelikož  $(x, y) \in \partial M$  implikuje  $x, y \in [-\pi/2, \pi/2]$ , z rovnosti  $\frac{\cos x}{x} = \frac{\cos y}{y}$  plyne  $x = y$ . Takové body jsou v  $\partial M$  dva:  $(\pi/\sqrt{8}, \pi/\sqrt{8})$  a  $(-\pi/\sqrt{8}, -\pi/\sqrt{8})$ . V prvním z nich nabývá  $f$  na  $\overline{M}$  maxima, ve druhém minima.

Proto, podle tvrzení na počátku paragrafu, je  $\sup f(M) = 2 \sin \frac{\pi}{\sqrt{8}}$  a  $\inf f(M) = -2 \sin \frac{\pi}{\sqrt{8}}$ . ■

**Příklad** Najděte  $f(M)$ , je-li  $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$  a  $f(x, y) = (7x + 10y)e^{-x-y}$ .

*Řešení.* Protože funkce  $f$  je spojitá na celém  $\mathbb{R}^2$  a množina  $M$  je konvexní, a tedy souvislá, je  $f(M)$  souvislá podmnožina  $\mathbb{R}$ . Proto je  $f(M)$  interval. Stačí tudíž určit supremum a infimum funkce  $f$  na  $M$  a zjistit, zda  $f$  těchto hodnot nabývá.

Množina  $M$  je otevřená a  $f$  má všude parciální derivace. Má-li tedy  $f$  v nějakém bodě  $M$  extrém, má tam parciální derivace nulové. Necháváme čtenáři ověřit, že takový bod neexistuje. Proto  $f$  nenabývá extrémů (a tedy  $f(M)$  je otevřený interval).

Podle tvrzení na počátku paragrafu je  $\sup f(M) = \sup f(\overline{M})$  a  $\inf f(M) = \inf f(\overline{M})$ . Přitom  $\overline{M} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0\}$ .

Postupujme podobně jako v příkladu v §69. Je  $f(0, 0) = 0$  a  $f \geq 0$  na  $\overline{M}$ . Tudíž  $\inf f(M) = 0$ .

Abychom našli supremum  $f$  na  $M$ , uvědomme si nejprve, že  $f$  nabývá na  $\overline{M}$  maxima. Pro  $(x, y) \in \overline{M}$  platí totiž  $f(x, y) \leq 10(x + y)e^{-x-y}$ . Protože platí  $\lim_{t \rightarrow +\infty} te^{-t} = 0$ , existuje  $T > 0$  takové, že pro  $t \geq T$  je  $te^{-t} < \frac{1}{10}f(1, 1)$ . Pak funkce  $f$  nabývá maxima na množině  $M_1 = \{(x, y) \in \overline{M} : x + y \leq T\}$  (tato množina je kompaktní – jde o uzavřený trojúhelník) a toto maximum je zároveň maximem na  $\overline{M}$ , protože pro  $(x, y) \in \overline{M} \setminus M_1$  je  $f(x, y) < f(1, 1)$ .

Protože  $f$  na  $M$  extrémů nemá, musí bod maxima ležet na hranici. Ta se skládá z bodu  $(0, 0)$  (kde je minimum) a ze dvou polopřímek  $H_1 = \{(x, 0) : x > 0\}$  a  $H_2 = \{(0, y) : y > 0\}$ .

Má-li  $f$  maximum v nějakém bodě  $H_1$ , pak má v tomto bodě maximum i vzhledem k  $H_1$ . Na  $H_1$  má  $f$  tvar  $f(x, 0) = 7xe^{-x}$ . Můžeme ji tedy vyšetřovat jako funkci jedné proměnné. Derivace je rovna  $7(1 - y)e^{-x}$ , je nulová právě pro  $x = 1$ . Přitom  $f(1, 0) = 7/e$ .

Podobně na  $H_2$  má  $f$  tvar  $f(0, y) = 10ye^{-y}$ . Derivace této funkce proměnné  $y$  je  $10(1 - y)e^{-y}$ , a to je rovno 0 právě pro  $y = 1$ . Přitom  $f(0, 1) = 10/e$ .

Z právě provedených výpočtů a výše uvedeného zdůvodnění plyne, že funkce  $f$  nabývá na  $\overline{M}$  maxima  $10/e$  v bodě  $(0, 1)$ . Proto  $\sup f(M) = 10/e$ , a máme tedy

- 2b (c) •  $f(x, y, z) = \sin x \sin y \sin z$ ,  $\nabla f(x, y, z) = (\cos x \sin y \sin z, \sin x \cos y \sin z, \sin x \sin y \cos z)$   
 •  $M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = \frac{\pi}{2}, x > 0, y > 0, z > 0\}$   
 •  $g(x, y, z) = x + y + z - \frac{\pi}{2}$ ,  $\nabla g(x, y, z) = (1, 1, 1)$   
 •  $G = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x > 0, y > 0, z > 0\}$  pro  $M$  a  $f, g \in C^1(\mathbb{R}^3)$

Ze zadání množiny  $M$  si všimneme, že musí platit  $x, y, z \in (0, \frac{\pi}{2})$ . Tudíž máme, že množina  $M$  je omezená, ale není uzavřená. Její uzávěr  $\overline{M} = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = \frac{\pi}{2}, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$  už je ale uzavřený i omezený a  $f$  je spojitá na  $\overline{M}$ , takže se na něm bude nabývat maxima a minima. Nejprve ale zjistíme podezřelé body na  $M$ .

Podle věty o multiplikátoru pro bod extrémů musí platit buďto

$$\nabla g(x, y, z) = (1, 1, 1) = \mathbf{o} \Leftrightarrow [x, y, z] \in \emptyset,$$

nebo že existuje  $\lambda \in \mathbb{R}$  splňující následující sadu rovnic.

$$\begin{aligned} \cos x \sin y \sin z + \lambda x &= 0 \\ \sin x \cos y \sin z + \lambda y &= 0 \\ \sin x \sin y \cos z + \lambda z &= 0 \\ x + y + z &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Odečtením druhé rovnice od první a třetí od první dojdeme k soustavě

$$\begin{aligned} \sin z(\cos x \sin y - \sin x \cos y) &= \sin z \sin(y - x) = 0 \\ \sin y(\cos x \sin z - \sin x \cos z) &= \sin y \sin(z - x) = 0 \\ x + y + z &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Analýzou jednotlivých možností a pomocí odvozeného  $x, y, z \in (0, \frac{\pi}{2})$  snadno dojdeme k jedinému výsledku

$$[x, y, z] = [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}]$$

Dosažením do funkce máme:

$$f([\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}]) = \frac{1}{8}$$

Navíc očividně  $[x, y, z] \in \overline{M} \setminus M$  splňují  $f([x, y, z]) = 0$  a  $[x, y, z] \in M$  splňují  $f([x, y, z]) > 0$ , a tedy na  $\overline{M}$  je maximum  $\frac{1}{8}$  a minimum 0. Z vlastností uzávěru ale také platí, že pro  $[x, y, z] \in \overline{M} \setminus M$  existuje posloupnost  $[x_n, y_n, z_n] \in M$  splňující  $[x_n, y_n, z_n] \rightarrow [x, y, z]$ , což ze spojitosti funkce  $f$  na  $\overline{M}$  dává  $f([x_n, y_n, z_n]) \rightarrow f([x, y, z]) = 0$ .

Maximum  $f$  na  $M$  je tedy  $\frac{1}{8}$  a to v bodě  $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}]$ , zatímco infimum je 0 a na  $M$  se ho nenabývá.

**Poznánka:** Příkladem posloupnosti výše může být třeba

$$[x_n, y_n, z_n] = [\frac{1}{n}, \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2n}, \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2n}] \rightarrow [0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}].$$

- (d) •  $f(x, y, z) = xy^2z^3$ ,  $\nabla f(x, y, z) = (y^2z^3, 2xyz^3, 3xy^2z^2)$   
 •  $M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x + 2y + 3z = a, x > 0, y > 0\}$   
 •  $g(x, y, z) = x + 2y + 3z - a$ ,  $\nabla g(x, y, z) = (1, 2, 3)$   
 •  $G = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x > 0, y > 0\}$  pro  $M$  a  $f, g \in C^1(\mathbb{R}^3)$

Množina  $M$  není uzavřená ani omezená, ale uzávěr  $\overline{M} = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x + 2y + 3z = a, x \geq 0, y \geq 0\}$  už je alespoň uzavřený. Nejprve zjistíme podezřelé body na  $M$ .

Podle věty o multiplikátoru pro bod extrémů musí platit buďto

$$\nabla g(x, y, z) = (1, 2, 3) = \mathbf{o} \Leftrightarrow [x, y, z] \in \emptyset,$$

nebo že existuje  $\lambda \in \mathbb{R}$  splňující následující sadu rovnic.

$$\begin{aligned} y^2z^3 + 1\lambda &= 0 \\ 2xyz^3 + 2\lambda &= 0 \\ 3xy^2z^2 + 3\lambda &= 0 \\ x + 2y + 3z &= a \end{aligned}$$

K vyřešení soustavy rovnic podmínky „nebo“ využijeme toho, že z první rovnice musí buď  $\lambda = 0$  nebo  $4(x^2 + y^2)x - Ky = 0$ . Lambda být nula nemůže kvůli druhé rovnici, takže musí platit  $(x^2 + y^2)x - Ky = 0$ . Díky pozorování ( $\Delta$ ) a tomu, že bod  $[0, 0]$  už je mezi podezřelými se můžeme omezit na  $x \neq 0$  a  $y \neq 0$ . Díky tomu můžeme bez problémů z  $4(x^2 + y^2)x - Ky = 0$  vyjádřit  $(x^2 + y^2)$  a dosadit do třetí rovnice. Po úpravách dojdeme k  $y = \frac{16x^3}{K}$ , což opět dosadíme do třetí rovnice a dořešením dostáváme podezřelé body:

$$[x, y] = \left[ \frac{\sqrt[4]{3K^2}}{4}, \frac{\sqrt[4]{27K^2}}{4} \right], \left[ -\frac{\sqrt[4]{3K^2}}{4}, -\frac{\sqrt[4]{27K^2}}{4} \right]$$

Dosazením všech podezřelých bodů do funkce máme:

$$f([0, 0]) = 0, \quad f\left(\left[\frac{\sqrt[4]{3K^2}}{4}, \frac{\sqrt[4]{27K^2}}{4}\right]\right) = \frac{\sqrt[4]{27K^2}}{4}, \quad f\left(\left[-\frac{\sqrt[4]{3K^2}}{4}, -\frac{\sqrt[4]{27K^2}}{4}\right]\right) = -\frac{\sqrt[4]{27K^2}}{4}$$

Z předchozích úvah je jasné, že maximum  $f$  na  $M$  je  $\frac{\sqrt[4]{27K^2}}{4}$  a to v bodě  $\left[\frac{\sqrt[4]{3K^2}}{4}, \frac{\sqrt[4]{27K^2}}{4}\right]$  a minimum  $-\frac{\sqrt[4]{27K^2}}{4}$  a to v bodě  $\left[\frac{\sqrt[4]{3K^2}}{4}, \frac{\sqrt[4]{27K^2}}{4}\right]$ .

2. •  $f(x, y, z) = x - y + 2z, \quad \nabla f(x, y, z) = (1, -1, 2)$

•  $M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 2, x^2 + z^2 < y\}$

Množina  $M$  je očividně omezená, ale není uzavřená. Její uzávěr  $\overline{M} = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 2, x^2 + z^2 \leq y\}$  už je ale uzavřený i omezený a  $f$  je spojitá na  $\overline{M}$ , takže se na něm bude nabývat maxima a minima. Úlohu si rozdělíme na dva kusy

•  $M_1 = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 2, x^2 + z^2 < y\}$

$g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2, \quad \nabla g(x, y, z) = (2x, 2y, 2z)$

$G = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 < y\}$  pro  $M_1$  a  $f, g \in C^1(\mathbb{R}^3)$

Podle věty o multiplikátoru pro bod extrému musí platit buďto

$$\nabla g(x, y, z) = (2x, 2y, 2z) = \mathbf{0} \Leftrightarrow [x, y, z] = [0, 0, 0] \notin M_1,$$

nebo že existuje  $\lambda \in \mathbb{R}$  splňující následující sadu rovnic.

$$1 + 2\lambda x = 0$$

$$-1 + 2\lambda y = 0$$

$$2 + 2\lambda z = 0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2$$

Vyřešením třeba pomocí vyjádření  $x, y$  a  $z$  z prvních tří rovnic a dosazením do poslední dostáváme řešení:

$$[x, y, z] = \left[-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{\sqrt{3}}\right] \notin M_1 \quad \text{a} \quad [x, y, z] = \left[\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right] \notin M_1$$

Na  $M_1$  tedy žádné podezřelé body nejsou.

•  $M_2 = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 2, x^2 + z^2 = y\}$

$g_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2, \quad \nabla g_1(x, y, z) = (2x, 2y, 2z)$

$g_2(x, y, z) = x^2 + z^2 - y, \quad \nabla g_2(x, y, z) = (2x, -1, 2z)$

$G = \mathbb{R}^3$  pro  $M_2$  a  $f, g_1, g_2 \in C^1(\mathbb{R}^3)$

Podle věty o multiplikátoru pro bod extrému musí platit buďto

$$\nabla g_1(x, y, z) = (2x, 2y, 2z) \text{ je násobkem } \nabla g_2(x, y, z) = (2x, -1, 2z),$$

nebo že existují  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$  splňující následující sadu rovnic.

$$1 + 2\lambda_1 x + 2\lambda_2 x = 0$$

$$-1 + 2\lambda_1 y - \lambda_2 = 0$$

$$2 + 2\lambda_1 z + 2\lambda_2 z = 0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2$$

$$x^2 + z^2 = y$$

Z podmínky lineární závislosti dostáváme body

$$[x, y, z] = [0, -\frac{1}{2a}, 0], \quad a \in \mathbb{R}, \quad \text{a} \quad [x, y, z] = [b, -\frac{1}{2}, c], \quad b, c \in \mathbb{R}.$$

Žádný z těchto bodů ale nespĺňuje  $g_1([x, y, z]) = 0 = g_2(x, y, z)$ , takže nepřipadají v úvahu jako podezřelé.

Nyní k řešení soustavy. Dosazením poslední rovnice v soustavě do předposlední rovnice dostáváme  $y^2 + y = 2 \Rightarrow y = 1, -2$ . Z rovnic je jasné, že  $x \neq 0$  a  $z \neq 0$ , a proto můžeme z první a třetí rovnice vyjádřit  $(2\lambda_1 + 2\lambda_2)$  a dát je do rovnosti. Z toho dostaneme  $z = 2x$ . Nyní už snadno dosazením obou poznatků do čtvrté rovnice dostáváme řešení:

$$[x, y, z] = [\frac{1}{\sqrt{5}}, 1, \frac{2}{\sqrt{5}}] \quad \text{a} \quad [-\frac{1}{\sqrt{5}}, 1, -\frac{2}{\sqrt{5}}]$$

Dosazením do funkce máme:

$$f([\frac{1}{\sqrt{5}}, 1, \frac{2}{\sqrt{5}}]) = \sqrt{5} - 1 \quad \text{a} \quad f([-\frac{1}{\sqrt{5}}, 1, -\frac{2}{\sqrt{5}}]) = -\sqrt{5} - 1$$

Je tedy jasné, že minimum  $f$  na  $M_2$  je  $-\sqrt{5} - 1$  a to v bodě  $[-\frac{1}{\sqrt{5}}, 1, -\frac{2}{\sqrt{5}}]$  a maximum  $\sqrt{5} - 1$  a to v bodě  $[\frac{1}{\sqrt{5}}, 1, \frac{2}{\sqrt{5}}]$ .

Celkem tedy na uzávěru  $\overline{M}$  je maximum  $\sqrt{5} - 1$  a minimum  $-\sqrt{5} - 1$  a obě se nabývají na  $\overline{M} \setminus M$ , a tedy jsou pro množinu  $M$  supremem a infimem, kterých se nenabývá. To plyne z vlastnosti uzávěru a spojitosti funkce na uzávěru, neboť z vlastnosti uzávěru platí, že pro  $[\frac{1}{\sqrt{5}}, 1, \frac{2}{\sqrt{5}}]$  existuje posloupnost  $[x_n, y_n, z_n] \in M$ , která k němu konverguje a ze spojitosti funkce na uzávěru  $f([\frac{1}{\sqrt{5}}, 1, \frac{2}{\sqrt{5}}]) \rightarrow \sqrt{5} - 1$ . Pro infimum by se to udělalo obdobně. Závěr tedy je, že funkce  $f$  má na  $M$  infimum  $-\sqrt{5} - 1$  a supremum  $\sqrt{5} - 1$  a ani jednoho se nenabývá.

## Řešení:

2el

1.  $f(x, y, z) := x + y + z$ ,  $H = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3: x^2 + y^2 + z^2 < 1, x^2 + y^2 + z^2 - 2x < 0\}$ .  
Je vhodné si uvědomit, že  $H$  je průnik dvou koulí. Druhou podmínku z její definice si totiž můžeme přepsat jako  $(x - 1)^2 + y^2 + z^2 < 1$ .

Množina  $H$  není kompaktní, tedy se na ní extrémů nabývat nemusí. Nicméně je omezená, a tedy má smysl vyšetřovat extrémy funkce  $f$  na kompaktní množině

$$\bar{H} = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3: x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x^2 + y^2 + z^2 - 2x \leq 0\}$$

Funkce  $f$  je na ní spojitá, extrémů se tam tedy nabývá, a tedy stačí hledat podezřelé body. Označme  $g_1(x, y, z) := x^2 + y^2 + z^2 - 1$  a  $g_2(x, y, z) := x^2 - 2x + y^2 + z^2$ , a spočítejme si gradienty:

$$\nabla g_1(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} \quad \nabla g_2(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x - 2 \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}.$$

Množinu  $\bar{H}$  si rozdělíme na čtyři části. Mlčky vlastně využíváme Tvzení 6 ve verzi pro maxima.

- $\text{int } \bar{H} = H$  (toto obecně platit nemusí, ale v tomto konkrétním případě to platí). Hledáme lokální extrémy, tedy potřebujeme gradient

$$\nabla f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Tedy  $\nabla f$  se nule nikdy nerovná, a tedy na  $H$  funkce  $f$  žádný lokální (a tedy ani globální) extrém nemá.

- $[x, y, z] \in \bar{H}$ :  $g_1(x, y, z) = 0$ . Tady máme jednu vazbu, použijeme Větu 1.
  - Hledáme nejprve body, kde  $\nabla g_1 = 0$ , což je jen bod  $[0, 0, 0]$ , ale ten nenáleží do množiny  $\{g_1 = 0\}$  (množiny bodů, ve kterých je funkce  $g_1$  nulová).
  - Tedy existuje  $\lambda$  taková, že

$$1 = \lambda 2x,$$

$$1 = \lambda 2y,$$

$$1 = \lambda 2z.$$

Zjevně  $\lambda \neq 0$ , tedy  $x = y = z$ , a tedy z rovnice  $g_1(x, x, x) = 0$  máme první dvojici podezřelých bodů  $\left[\pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \pm \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$ . Nicméně jen jeden z nich náleží do množiny  $\bar{H}$ , a sice

$$\left[ \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right].$$

- $[x, y, z] \in \bar{H}$ :  $g_2(x, y, z) = 0$ . Opět jedna vazba, opět Lagrange.
  - Hledáme nejprve body, kde  $\nabla g_2 = 0$ , což je jen bod  $[1, 0, 0]$ , ale ten nenáleží do množiny  $\{g_2 = 0\}$ .

- Tedy existuje  $\lambda$  taková, že

$$1 = \lambda(2x - 2),$$

$$1 = \lambda 2y,$$

$$1 = \lambda 2z.$$

opět vidíme, že  $\lambda \neq 0$ , tedy  $y = z = \frac{1}{2\lambda}$ . A první rovnici můžeme podělit  $2\lambda$ , dostaneme  $\frac{1}{2\lambda} = x - 1$ , tedy  $y = x - 1$ . Dosadíme  $x = y + 1$  do rovnice  $g_2 = 0$ , dostaneme

$$(y + 1 - 1)^2 + y^2 + y^2 = 1,$$

tedy máme další dvojici podezřelých bodů  $\left[ \frac{\pm 1 + \sqrt{3}}{\sqrt{3}}, \pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \right]$ , z nichž jen jeden je v množině  $\bar{H}$ :

$$\left[ \frac{-1 + \sqrt{3}}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right]$$

• A konečně množina  $[x, y, z] \in \bar{H}$ :  $g_1(x, y, z) = g_2(x, y, z) = 0$ . Tady máme vazby dvě:

-  $\nabla g_1$  a  $\nabla g_2$  jsou lineárně závislé, neboli:

\*  $\nabla g_1 = 0$ , pak  $x = y = z = 0$ , ale  $g_1(0, 0, 0) = -1 \neq 0$ , nebo

\* Existuje  $\lambda$  tak, že  $\nabla g_2 = \lambda \nabla g_1$ , tedy

$$2\lambda x = 2x - 2,$$

$$2\lambda y = 2y,$$

$$2\lambda z = 2z.$$

Po úpravě máme

$$(2\lambda - 2)x = -2,$$

$$(2\lambda - 2)y = 0,$$

$$(2\lambda - 2)z = 0.$$

Z první rovnice vidíme, že  $(2\lambda - 2) \neq 0$ , tedy tím ve druhé a třetí rovnici můžeme podělit a dostaneme  $y = z = 0$ . Pak ze vztahů  $g_1 = g_2 = 0$  hravě zjistíme, že zde nemáme žádná řešení.

- Nebo existují  $\lambda_1$  a  $\lambda_2$  tak, že

$$1 = 2\lambda_1 x + 2\lambda_2 x - 2\lambda_2 = 2(\lambda_1 + \lambda_2)x - 2\lambda_2,$$

$$1 = 2\lambda_1 y + 2\lambda_2 y = 2(\lambda_1 + \lambda_2)y,$$

$$1 = 2\lambda_1 z + 2\lambda_2 z = 2(\lambda_1 + \lambda_2)z,$$

$$0 = x^2 + y^2 + z^2 - 1,$$

$$0 = x^2 + y^2 + z^2 - 2x.$$

Z druhé rovnice je vidět, že  $2(\lambda_1 + \lambda_2) \neq 0$ , tedy tím můžeme rovnice podělit, a tedy  $y = z$ . Odečtením 5. rovnice od 4. dostaneme, že  $x = \frac{1}{2}$ . A ze čtvrté rovnice tedy

$$\frac{1}{4} + 2y^2 = 1,$$

a tedy  $y = \pm\sqrt{\frac{3}{8}}$ . Máme tedy dvojici podezřelých bodů

$$\left[ \frac{1}{2}, \pm\sqrt{\frac{3}{8}}, \pm\sqrt{\frac{3}{8}} \right].$$

A nyní zbývá už jen dosazení:

$$\begin{aligned} f\left(\left[\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right]\right) &= \sqrt{3} = S \doteq 1.7321, \\ f\left(\left[\frac{-1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right]\right) &= 1 - \sqrt{3} = I \doteq -0.73205, \\ f\left(\left[\frac{1}{2}, \sqrt{\frac{3}{8}}, \sqrt{\frac{3}{8}}\right]\right) &\doteq 1.7247, \\ f\left(\left[\frac{1}{2}, -\sqrt{\frac{3}{8}}, -\sqrt{\frac{3}{8}}\right]\right) &\doteq -0.72474. \end{aligned}$$

Tedy, jelikož všechny tyto body nejsou v množině  $H$  a díky Tvzení 3 víme, že funkce  $f$  na  $H$  minima ani maxima nenabývá.

2.  $f(x, y) := -x^4 - y^4$ ,  $H = \{x^2 + 2y^2 > 1\}$ . Je vidět, že infimum je  $I = -\infty$ , stačí uvážit  $x = y \rightarrow \infty$ , pak  $f(x, x) \rightarrow -\infty$ .

Množina není ani omezená, ani uzavřená, extrémů se tedy nabývat nemusí. Tedy, abychom mohli vyšetřit jaké bude supremum (nebo snad maximum), tak je třeba si množinu omezit a uzavřít. Je vidět, že čím blíže jsme k nule, tím vyšší bude hodnota funkce. Tedy je rozumné zvolit třeba množinu

$$K := \{x^4 + y^4 \leq 42, x^2 + 2y^2 \geq 1\},$$

což je jakési „mezikruží“.  $K$  už kompaktní je, a tedy funkce  $f$  (která je spojitá) na  $K$  maxima nabývá. (Minima taky, ale již víme, že to je nám jedno.) Navíc

$$\sup_{[x,y] \in H} f(x, y) = \sup_{[x,y] \in K} f(x, y) = \max_{[x,y] \in K} f(x, y).$$

Toto je skoro zřejmé, nicméně celé zdůvodnění si žádá několik kroků. V písemce toto není třeba probírat tak podrobně, ale je fajn si uvědomit, jak by se to formálně zdůvodnilo.

- $\overline{\text{int } K} = \overline{\{x^4 + y^4 < 42, x^2 + 2y^2 > 1\}} = K$ , tedy z Tvzení 3 plyne, že

$$\sup_{[x,y] \in \text{int } K} f(x, y) = \sup_{[x,y] \in K} f(x, y). \quad (1)$$

- 

$$[x, y] \in H \setminus \text{int } K = \{x^4 + y^4 \geq 42\} \Rightarrow f(x, y) \leq -42.$$

Tedy

$$\sup_{[x,y] \in H \setminus \text{int } K} f(x, y) \leq -42.$$



- $[1, 1] \in \text{int } K$ , tedy

$$\sup_{[x,y] \in \text{int } K} f(x, y) \geq f(1, 1) = -2 > -42 = \sup_{[x,y] \in H \setminus \text{int } K} f(x, y). \quad (2)$$

- $H = (H \setminus \text{int } K) \cup (\text{int } K)$ . Tedy díky Tvrzení 6 a (2) máme

$$\sup_{[x,y] \in H} f(x, y) = \max \left\{ \sup_{[x,y] \in H \setminus \text{int } K} f(x, y), \sup_{[x,y] \in \text{int } K} f(x, y) \right\} = \sup_{[x,y] \in \text{int } K} f(x, y). \quad (3)$$

- V posledním kroku jen dáme dohromady (1) a (3) a dostaneme výsledek. Jelikož je  $K$  kompaktní a  $f$  spojitá, je supremum a maximum to samé.

Pro zjištění suprema na množině  $H$  tedy hledáme maximum na množině  $K$ , a body kde se ho nabývá. Budou-li tyto body v množině  $H$ , pak jsme na ní našli maximum. Pokud ne, pak se maxima na množině  $H$  nenabývá a máme jen supremum.

Na vnitřku množiny  $K$  funkce extrém nemá, neboť  $\nabla f(x, y) = (-4x^3, -4y^3)^\top$ , tedy  $\nabla f = 0$  pouze když  $x = y = 0$ , což do množiny  $K$  nenáleží.

Hranice má dvě části:

- $\{x^4 + y^4 = 42\}$ . Tam být maximum nemůže, neboť  $f(1, 1) = -2$ , a pro  $[x, y] \in \{x^4 + y^4 = 42\}$  platí, že  $f([x, y]) = -42$ .
- $x^2 + 2y^2 = 1$ . Tedy konečně přichází na řadu Lagrangeovy multiplikátory. Označme  $g(x, y) := x^2 + 2y^2 - 1$ . Pak  $\nabla g(x, y) = (2x, 4y)^\top$ . Tento gradient je nulový pouze pro  $x = y = 0$ , což v množině  $K$  není. Tedy z Věty 1 plyne, že existuje  $\lambda$  tak, aby

$$\begin{pmatrix} -4x^3 \\ -4y^3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2x \\ 4y \end{pmatrix}.$$

Tedy buď je  $x = 0$  ( $g(x, y) = 0$ , tedy  $y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ ), nebo  $y = 0$  (pak  $x = \pm 1$ ). A nebo mohou vydělit první rovnici  $x$ , druhou  $y$  a dostaneme, že  $4\lambda = 2(-4x^2) = -4y^2$ . Tedy  $2x^2 = y^2$ , a z rovnice  $g(x, y) = 0$  dostáváme 4 řešení:  $\left[\frac{1}{\sqrt{5}}, \pm \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right]$  a  $\left[-\frac{1}{\sqrt{5}}, \pm \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right]$ . Dosazení:

$$f\left(0, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{4}, \quad (4)$$

$$f(\pm 1, 0) = -1, \quad (5)$$

$$f\left(\left[\frac{1}{\sqrt{5}}, \pm \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right]\right) = -\frac{1}{5}, \quad (6)$$

$$f\left(\left[-\frac{1}{\sqrt{5}}, \pm \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right]\right) = -\frac{1}{5}. \quad (7)$$

Jelikož body  $\left[\frac{1}{\sqrt{5}}, \pm \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right]$  a  $\left[-\frac{1}{\sqrt{5}}, \pm \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right]$  v množině  $H$  neleží, dostáváme, že maximum neexistuje a  $S = -\frac{1}{5}$ .

3. Ukažte, že konečné sjednocení řídkých množin je řídká množina. Je to pravda pro spočetná sjednocení?

Množina  $A \subset X$  je řídká v  $(X, \rho)$ , jestliže  $X \setminus \overline{A}$  je hustá v  $X$ .

Množina  $B \subset X$  je hustá v  $(X, \rho)$ , jestliže  $\overline{B} = X$ .

**Řešení:** Nechť  $A_1$  a  $A_2$  jsou řídké množiny v  $(X, \rho)$ . Pak pro  $A_1 \cup A_2$  máme

$$X \setminus (\overline{A_1 \cup A_2}) = X \setminus (\overline{A_1} \cup \overline{A_2}) = (X \setminus \overline{A_1}) \cap (X \setminus \overline{A_2})$$

Navíc platí, že  $(X \setminus \overline{A_1})$  i  $(X \setminus \overline{A_2})$  je otevřená a hustá množina. Z věty z přednášky platí, že průnik takových dvou množin je také hustá množina. Tedy  $A_1 \cup A_2$  je řídká množina.

Indukcí lze ukázat, že konečné sjednocení řídkých množin je řídká množina.

Pro spočetné sjednocení tvrzení neplatí. Uvažujme jednoprvkové množiny  $\{q\}$ , kde  $q \in \mathbb{Q}$ . Množiny jsou zjevně řídké v  $\mathbb{R}$ . Ale jejich spočetné sjednocení je celé  $\mathbb{Q}$ , což řídká množina není.