13. cvičení – Extrémy a nekompakty

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Teorie

Poznámka 1. Nechť f je spojitá na $\overline{M}$. Pak $\sup f(M) = \sup f(\overline{M})$ a $\inf f(M) = \inf f(\overline{M})$.

Poznámka 2. Nechť K je neprázdní kompaktní množina v metrickém (pod)prostoru X. Nechť navíc $\operatorname{int} K \subset X$. Nechť funkce f je spojitá na K a nechť existuje $x_0 \in \operatorname{int} K$ tak, že

$$x \in \partial K \cup (X \setminus K) \implies f(x) > f(x_0) \qquad (\text{resp.} f(x) < f(x_0)).$$

Pak má funkce f v množině X minimum (resp. maximum) rovné $\min f(K)$ (resp. $\max f(K)$) a všechny body $x \in X \cup K$, v nichž je $f(x) = \min f(K)$ (resp. $f(x) = \max f(K)$), leží v $\operatorname{int} K$.

Globální extrémy:

(Ne vždy je nutné projít všechny odrážky a ne vždy v tomto pořadí.)

1. **Prohlédneme** si funkci. Jaký má definiční obor? Je nezáporná? Jaké asi budou limity v krajích D_f?
2. **Zderivujeme** funkci na vnitřku množiny a najdeme podezřelé body.
3. Odhadneme limity v krajích definičního oboru.
   (a) Typicky jak se funkce chová v **nekonečnu**. (Např. jak se funkce chová na přímkách $y = 0$, $x = 0$.)
   (b) Jak se funkce chová na **hranici**.
4. Pokud to vypadá, že funkce **globální extrémy nemá** (např. jde někde do nekonečna), tak za pomoci **limit** najdeme supremum/infimum.
5. Pokud to vypadá, že v místech **lok. extrémů jsou i globální**, tak:
   (a) Najdeme **kompakt**, který obsahuje tyto podezřelé body. Spojitá funkce na kompaktu musí nabývat extrémů.
   (b) Ukážeme, že **mimo kompakt** je funkce menší než maximum (a větší než minimum). Tady pomůže vhodná volba kompaktu, znalost limit a obvyklé odhady.

Algoritmus: Extrémy na omezené množině:

1. Je-li množina **uzavřená**, tak odůvodníme, že **spojitá funkce na kpt.** nabývá extrémy.
2. Extrémy mohou být:
   (a) na **vnitřku** množiny jen v místech s **nulovými derivacemi** (jejich typ nevyšetřujeme, pokud na to nejsme přímo tázáni);
   (b) v bodech vnitřku, kde **neexistuje derivace**;
   (c) na **hranici**: hraniční křivky (nebo plochy) - obvykle lze dosadit a výraz zjednodušit.
   (d) na **hranici hranice**: krajní body, hroty trojúhelníku atp.
3. Všechny podezřelé body **sepíšeme** a **porovnáme** jejich funkční hodnoty. Vybereme maximum a minimum.
4. Pokud množina **není uzavřená**, tak ji prve **uzavřeme** a vyšetříme jako kompakt. Pokud je extrém na její hranici (mimo množinu), tak funkce tento extrém nemá - ale bude to její **supremum/infimum**

Příklady

1. Najděte globální extrémy funkcí (nebo supremum a infimum):
   (a) $f(x, y) = x^3 - 3xy + y^3$, $M = [0, \infty)^2$.
   Hint: $x \geq 3, y \leq 3$: $f(x, y) \geq x^3 - 3xy \geq 2x(3 - y) \geq 0$
   Hint: $x \geq 3, y \geq 3$: $f(x, y) \geq 3(x^2 - xy + y^2) = 3((x - y)^2 + xy) \leq 0$

   (b) $f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)}$
   Hint: Jak se chová funkce te^{-t}?
   (c) $f(x, y) = (x^2 + 7y^2)e^{-5x^2-2y^2}$
   Hint: Lze se nějakými odhady dostat k funkci te^{-t}?
   (d) $f(x, y) = 3x + \dfrac{4y}{x^2} + \dfrac{27}{y^3}$, $M = (0, \infty)^2$
   (e) $f(x, y) = (7x + 10y)e^{-x-y}$, $x > 0$, $y > 0$.
2. Najděte globální extrémy funkcí (nebo supremum a infimum):
   (a) $f(x, y) = \sin x + \sin y$, $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < \pi^2/4\}$
   (b) $f(x, y, z) = \sin x \sin y \sin z$, $M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x+y+z = \frac{\pi}{2}, x > 0, y > 0, z > 0\}$
   (c) $f(x, y, z) = x - y + 2z$, $M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 2, x^2 + z^2 < y\}$
   (d) $f(x, y, z) = x + y + z$, $M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 1, x^2 + y^2 + z^2 - 2x < 0\}$
   (e) $f(x, y) = -x^4 - y^4$, $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2y^2 > 1\}$
3. Ukažte, že konečné sjednocení řídkých množin je řídká množina. Je to pravda pro spočetná sjednocení?
   Množina $A \subset X$ je řídká v (X, ρ), jestliže $X \setminus \overline{A}$ je hustá v X.
   Množina $B \subset X$ je hustá v (X, ρ), jestliže $\overline{B} = X$.