12. cvičení – Lagrangeovy multiplikátory

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Teorie

Věta 1 (Lagrangeovy multiplikátory). Nechť $G \subset \mathbb{R}^2$ je otevřená množina, $f, g \in C^1(G)$, $M = \{[x,y] \in G, g(x,y) = 0\}$ a $[x_0, y_0] \in M$ je bodem lokálního extrému funkce f vzhledem k množině M. Pak je splněna alespoň jedna z následujících podmínek:

1. $\nabla g(x_0, y_0) = (0, 0)$
2. existuje $\lambda \in \mathbb{R}$ splňující $\nabla f(x_0, y_0) + \lambda \nabla g(x_0, y_0) = (0, 0)$

Věta 2 (Lagrangeovy multiplikátory 2). Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina, $f, g_1, \dots, g_m \in C^1(G)$, $m < n$, $M = \{\boldsymbol{z} \in G, g_1(\boldsymbol{z}) = 0, g_2(\boldsymbol{z}) = 0, \dots, g_m(\boldsymbol{z}) = 0\}$ a $\tilde{\boldsymbol{z}} \in M$ je bodem lokálního extrému funkce f vzhledem k množině M. Pak je splněna alespoň jedna z následujících podmínek:

1. vektory $\nabla g_1(\tilde{\boldsymbol{z}}), \nabla g_2(\tilde{\boldsymbol{z}}), \dots, \nabla g_m(\tilde{\boldsymbol{z}})$ jsou lineárně závislé,
   Jeden vektor je lineárně závislý, jestliže je nulový, dva vektory jsou lineárně závislé, jestliže jeden je násobek druhého.
2. existují $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ splňující
$$\nabla f(\tilde{\boldsymbol{z}}) + \lambda_1 \nabla g_1(\tilde{\boldsymbol{z}}) + \lambda_2 \nabla g_2(\tilde{\boldsymbol{z}}) + \dots + \lambda_m \nabla g_m(\tilde{\boldsymbol{z}}) = \mathbf{0}.$$

Příklady

1. Najděte globální extrémy funkcí na množině M
   (a) $f(x,y,z) = x - 2y - 2z$, $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$
   (b) $f(x,y) = x^2 + y$, $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$
   (c) $f(x,y) = 4x + 3y - 4$, $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + (y-2)^2 = 1\}$
   (d) $f(x,y,z) = x - y + 3z$, $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + 4z^2 = 4\}$
   (e) $f(x,y,z) = x + 2y + 3z$, $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : x - y + z = 1, x^2 + y^2 = 1\}$
   (f)❀ $f(x,y) = x^2 + y^2$, $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : 5x^2 - 6xy + 5y^2 - 4 = 0\}$

Zkouškové příklady

2. Najděte globální extrémy funkcí na množině M
   (a) $f(x,y,z) = xy + yz$, $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + y + z = 1\}$
   (b) $f(x,y,z) = z + e^{xy}$, $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, x^2 + y^2 = z^2\}$
   (c) $f(x,y,z) = x^2 + 2xz + y^2 + z$, $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, x = y^2 + z^2\}$
3. Najděte globální extrémy funkcí na množině M
   (a) $f(x,y) = x^4 y$, $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : x^4 + y^4 \leq 16, x \geq -1\}$
   (b) $f(x,y) = 2x + 4y$, $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y} \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$
   (c) $f(x,y,z) = e^{-z^2}(x^2 + y^2 + xy)$, $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, |z| \leq 1\}$
   (d) $f(x,y) = (x^2 + 7y^2)e^{-(2x^2+y^2)}$, $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 \leq 1\}$

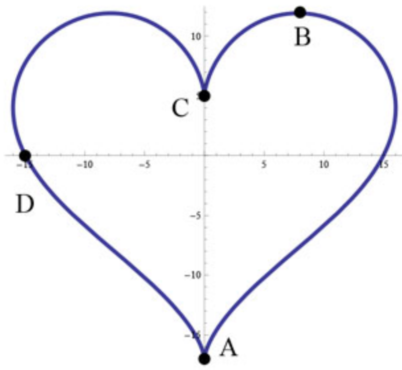
4. Určete maximální možný objem kvádru, jehož hrany jsou rovnoběžné se souřadnými osami, jeden jeho vrchol leží v počátku a diagonálně protilehlý vrchol leží v množině $M = \{[x, y, z], x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, 4x + 2y + z = 2.\}$

Bonusové příklady

5. Farmář a fařmářka mají 100 m pletiva a rádi by oplotili pozemek pro ovce tak, aby měl co největší plochu. Trvají na tom, že pozemek bude mít tvar obdélníku. Ježto je u řeky, stačí jej oplotit ze 3 stran. Jaké bude zadání za pomoci Lagrangeových multiplikátorů?
   (a) $f(x, y) = xy$, $g(x, y) = 2x + y - 100$
   (b) $f(x, y) = 2x + 2y - 100$, $g(x, y) = xy$
   (c) $f(x, y) = xy$, $g(x, y) = x + y - 100$
   (d) $f(x, y) = x + y$, $g(x, y) = xy - 100$

Figure 1: https://www.cbr.com/shaun-the-sheep-best-worst-episodes-imdb/

6. Ve kterém z bodů A, B, C, D se nachází minimum funkce $f(x, y) = y$ vzhledem ke křivce na obrázku?



Zdroj: https://www.cpp.edu/conceptests/question-library/mat214.shtml

(1f) $5(x^2 + y^2) = 4 + 6xy \leq 4 + 3(x^2 + y^2)$