11. cvičení – Extrémy

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Příklady

1. Najděte lokální extrémy funkcí

   (a) $f(x, y) = x^2 + (y-1)^2$

   Řešení:

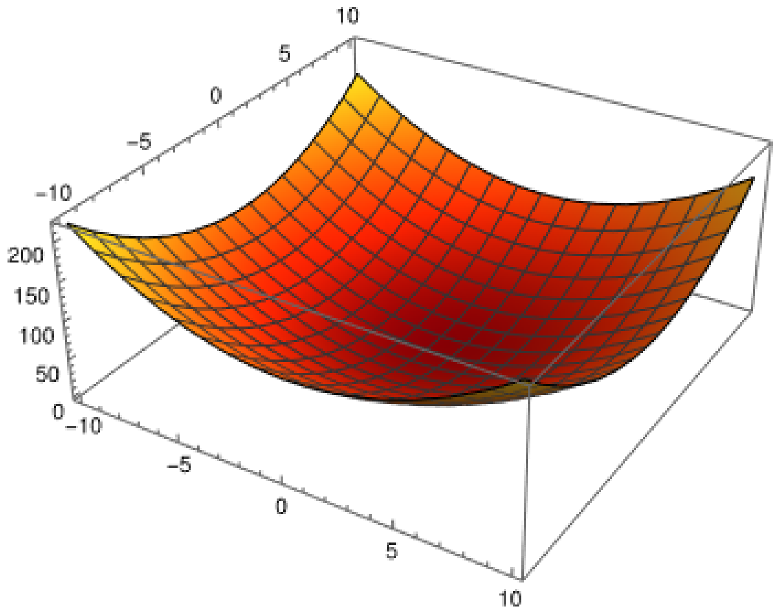
   Podotkněme, že je evidentní, že funkce f je nezáporná a nuly nabývá pouze v bodě $(0, 1)$, kde tedy nabývá globálního minima. Pojďme nicméně vyšetřit existenci extrémů standardním postupem. Funkce f je definována na $\mathbb{R}^2$. Parciální derivace

   $$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2(y-1)$$

   jsou spojité, tudíž f má v každém bodě totální diferenciál. Jediné body podezřelé z lokálních extrémů jsou tedy stacionární body, tj. body, kde jsou obě parciální derivace nulové. V jiných bodech funkce f nemůže mít extrém. Řešením rovnic

   $$2x = 0, \qquad 2(y-1) = 0$$

   vidíme, že jediným stacionárním bodem je bod $(0, 1)$, kde, jak už jsme zmínili funkce zřejmě nabývá globálního minima. Nemusíme tedy vyšetřovat definitnost matice druhého diferenciálu (navíc bychom tak dostali pouze informaci, že jde o lokální minimum).



   (b) $f(x, y) = x^2 - (y-1)^2$

   Řešení:

Funkce f je definována na $\mathbb{R}^2$. Parciální derivace

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -2(y-1)$$

jsou spojité, tudíž f má v každém bodě totální diferenciál. Jediné body podezřelé z lokálních extrémů jsou tedy stacionární body, tj. body, kde jsou obě parciální derivace nulové. V jiných bodech funkce f nemůže mít extrém. Řešením rovnic

$$2x = 0, \qquad -2(y-1) = 0$$

vidíme, že jediným stacionárním bodem je bod $(0,1)$. Oproti předchozí úloze není automaticky vidět, zda se v tomto bodě nabývá extrému. Vyšetříme tedy definitnost matice druhého diferenciálu, tj. matici

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

Určeme tedy nejprve druhé parciální derivace. Máme

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0.$$

Matice druhého diferenciálu (v bodě $(0,1)$) má tedy tvar

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

a její hlavní determinanty jsou $D_1 = 2 > 0$, $D_2 = -4 < 0$. Protože druhý hlavní determinant (tedy determinant celé matice) je záporný, je matice druhého diferenciálu indefitní, extrému se tedy v bodě $(0,1)$ nenabývá. Funkce f tedy v žádném bodě nemá lokální extrém.

(c) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$

Řešení:

Funkce f je definována na $\mathbb{R}^2$. Spočtěme její parciální derivace. Máme

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3y, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 3x.$$

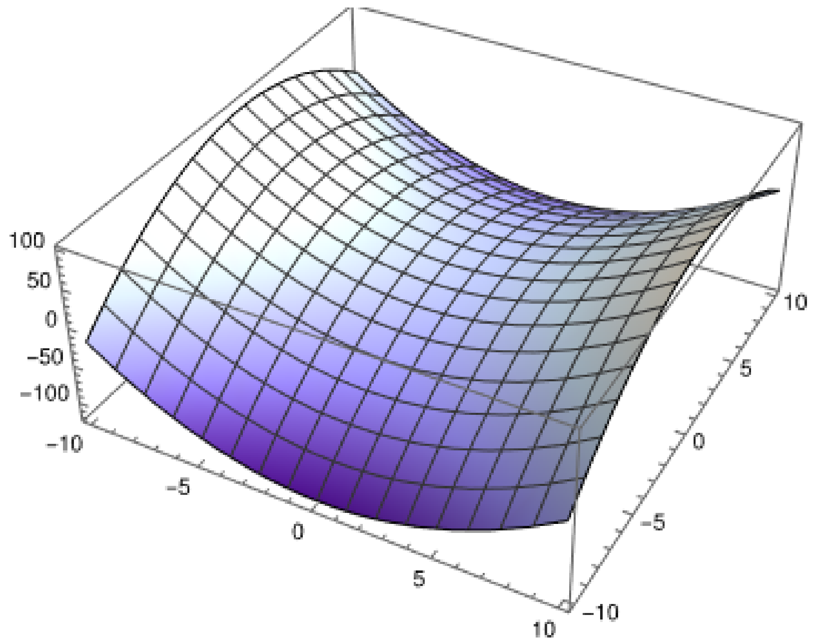
Stacionární body jsou ty, ve kterých jsou obě parciální derivace nulové. Najdeme je řešením soustavy

$$\begin{aligned} 3x^2 - 3y &= 0 \\ 3y^2 - 3x &= 0. \end{aligned}$$

Krácením trojek, vyjádřením $y = x^2$ z první rovnice a dosazením do druhé dostaneme rovnici

$$x^4 - x = 0,$$

která má vzhledem k rozkladu $x^4 - x = x(x^3-1) = x(x-1)(x^2+x+1)$ dvě řešení, $x_1 = 0$ a $x_2 = 1$. Těmto dvěma řešením přísluší řešení $y_1 = 0$ a $y_2 = 1$.



Druhé parciální derivace jsou

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -3.$$

Matice druhého diferenciálu v prvním stacionárním bodě $(1, 1)$ je tedy

$$\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$$

hlavní subdeterminanty jsou $D_1 = 6 > 0$, $D_2 = 36 - 9 = 27 > 0$, matice je tedy pozitivně definitní a v bodě $(1, 1)$ má tedy funkce f lokální minimum $f(1, 1) = -1$. Matice druhého diferenciálu ve druhém stacionárním bodě $(0, 0)$ je ovšem

$$\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

je tedy indefinitní, funkce f v bodě $(0, 0)$ tedy nenabývá extrému.

(d) $f(x, y) = e^{-x^2-y^2}(2y^2 + x^2)$

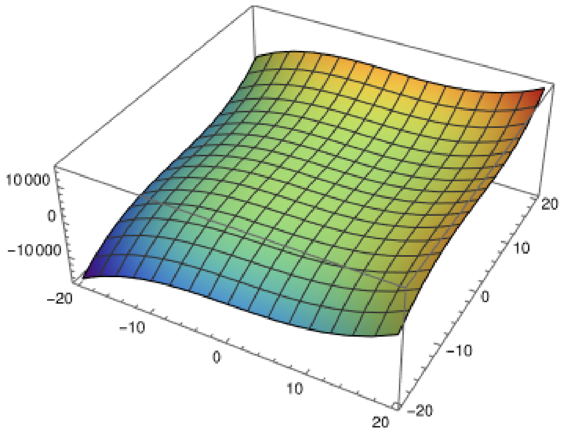
Řešení: Příklad máme odsud: `http://homel.vsb.cz/~kre40/esfmat2/fcevicprom.html`

Funkce je $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$. Spočteme první parciální derivace

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2xe^{-x^2-y^2}(x^2 + 2y^2 - 1)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2ye^{-x^2-y^2}(x^2 + 2y^2 - 2)$$

a položíme je rovny 0. Řešíme tedy tuto soustavu:

$$-2xe^{-x^2-y^2}(x^2 + 2y^2 - 1) = 0$$
$$-2ye^{-x^2-y^2}(x^2 + 2y^2 - 2) = 0$$



Protože $e^{-(x^2+y^2)} > 0$, dostáváme

$$-2x(x^2+2y^2-1)=0$$
$$-2y(x^2+2y^2-2)=0$$

Z 1. rovnice plyne, že buď $x=0$ nebo $x^2+2y^2-1=0$.

- $x=0$ Dosadíme do druhé rovnice:

  $$-2y2(y^2-1)=0$$

  tedy máme podezřelé body $(0,0)$, $(0,1)$, $(0,-1)$.
- $x^2+2y^2-1=0$ Dosadíme do druhé rovnice:

  $$-2y(-1)=0$$

  tedy $y=0$. Dosadíme zpět do podmínky:

  $$x^2-1=0.$$

  Tedy máme podezřelé body $(1,0)$, $(-1,0)$.

Celkem máme 5 podezřelých bodů: $(0,0)$, $(0,1)$, $(0,-1)$, $(1,0)$, $(-1,0)$.
Pro určení extrémů spočteme 2. derivace

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = e^{-x^2-y^2}(4x^4+2x^2(4y^2-5)-4y^2+2)$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2xe^{-x^2-y^2}(x^2(2y^2-1)+4y^4-8y^2+1)$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = e^{-x^2-y^2}(x^2(4y^2-2)+8y^4-20y^2+4)$$

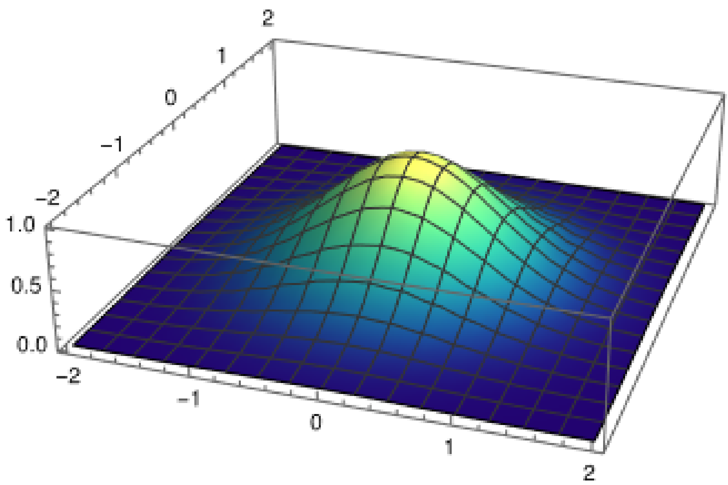
Sestavíme Hessovu matici a dosadíme do ní podezřelé body. Dle Sylvesterova kritéria určíme definitnost matice a případné lok. extrémy.

- $(0,0)$

  $$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

  Lok. minimum.

- $(0,1)$
$$\begin{pmatrix} -2/e & 0 \\ 0 & -8/e \end{pmatrix}$$
Lok. maximum.
- $(0,-1)$
$$\begin{pmatrix} -2/e & 0 \\ 0 & -8/e \end{pmatrix}$$
Lok. maximum.
- $(1,0)$
$$\begin{pmatrix} -4/e & 0 \\ 0 & 2/e \end{pmatrix}$$
Není extrém.
- $(-1,0)$
$$\begin{pmatrix} -4/e & 0 \\ 0 & 2/e \end{pmatrix}$$
Není extrém.



(e) $f(x,y) = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}$, $x, y > 0$

Řešení:

Funkce f je dle zadání definována na prvním kvadrantu. Spočtěme její parciální derivace. Máme
$$\frac{\partial f}{\partial x} = y - \frac{50}{x^2}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x - \frac{20}{y^2}.$$

Stacionární body jsou ty, ve kterých jsou obě parciální derivace nulové. Najdeme je řešením soustavy

$$\begin{aligned} y - \frac{50}{x^2} &= 0 \\ x - \frac{20}{y^2} &= 0. \end{aligned}$$

Z první rovnice máme, že $y = \frac{50}{x^2}$, dosazením do druhé a přenásobením jmenovatelem získáme rovnici

$$x - \frac{20}{50^2}x^4 = 0.$$

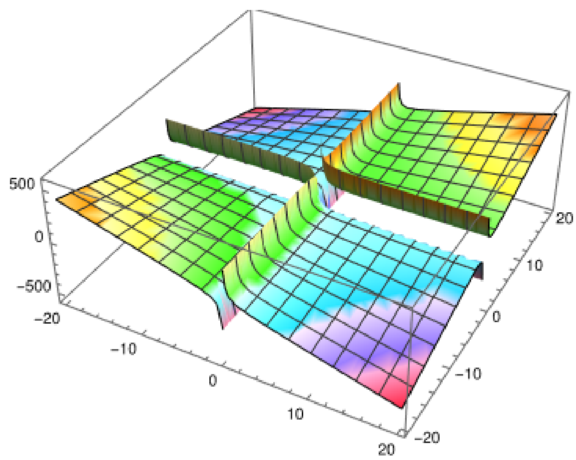
Její řešení jsou $x_1 = 0$ a $x_2 = \sqrt[3]{\frac{50^2}{20}} = \sqrt[3]{125} = 5$. První řešení ovšem nemůže být částí řešení celé soustavy. Odpovídající hodnotou pro druhý kořen je $y_2 = \frac{50}{25} = 2$. Funkce f má tedy (v prvním kvadrantu) jediný stacionární bod $(5, 2)$.
Druhé parciální derivace jsou

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{100}{x^3}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{40}{y^3}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1.$$

Matice druhého diferenciálu v bodě $(5, 2)$ je tedy

$$\begin{pmatrix} \frac{4}{5} & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

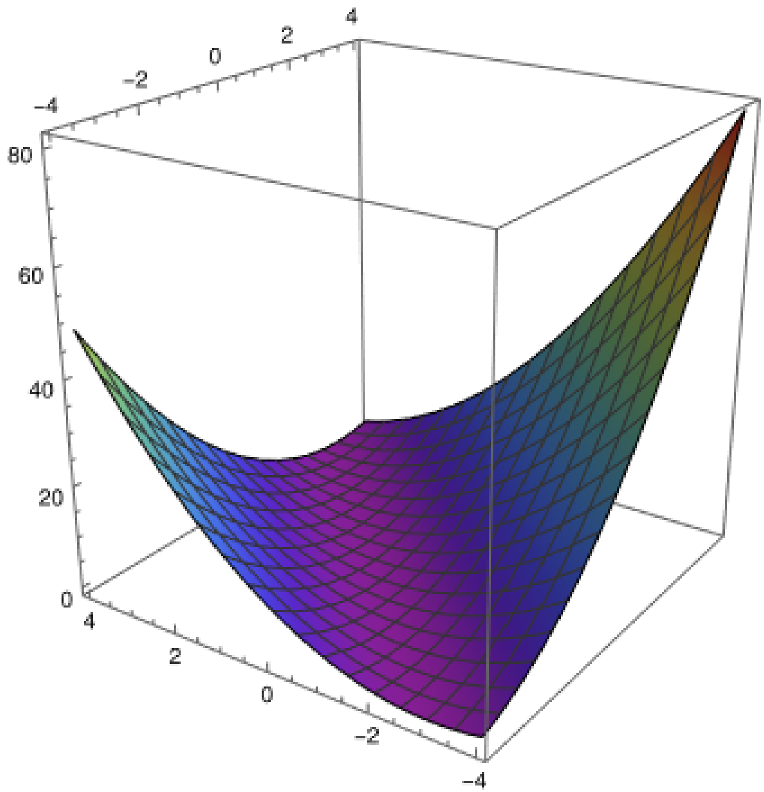
hlavní subdeterminanty jsou $D_1 = \frac{4}{5} > 0$ a $D_2 = 4 - 1 = 3 > 0$, matice je tedy pozitivně definitní a funkce f má tudíž v bodě $(5, 2)$ (ostré) lokální minimum $f(5, 2) = 30$.



(f) $f(x, y) = (x - y + 1)^2$
Řešení:
Je vidět, že funkce f je nezáporná. Ve všech bodech přímky $x - y + 1 = 0$ tedy nabývá globálního minima. Přesvědčíme se, že jiné extrémy funkce f nemá. Parciální derivace jsou

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2(x - y + 1), \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = -2(x - y + 1).$$

Je zjevné, že obě parciální derivace jsou nulové právě v bodech zmíněné přímky. V jiných bodech se tedy extrému nenabývá.



(g) $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3(xy + xz)$

Řešení:

Příklad je z http://projects.math.slu.cz/AM/activ/soubory/opory/VybrPartCv.pdf

Najdeme první parciální derivace

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3y - 3z$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 3x$$
$$\frac{\partial f}{\partial z} = 3z^2 - 3x$$

Položíme je rovny 0 a najdeme podezřelé body. Výsledek: $(0, 0, 0)$ a $(\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2})$. Spočteme 2. parciální derivace a sestavíme Hessovu matici

$$\begin{pmatrix} 6x & -3 & -3 \\ -3 & 6y & 0 \\ -3 & 0 & 6z \end{pmatrix}$$

V bodě $(0,0,0)$ máme

$$\begin{pmatrix} 0 & -3 & -3 \\ -3 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Upravíme symetrickými úpravami a zjistíme, že matice je indefinitní - tedy zde není extrém.
V bodě $(\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2})$ máme

$$\begin{pmatrix} 6\sqrt[3]{4} & -3 & -3 \\ -3 & 6\sqrt[3]{2} & 0 \\ -3 & 0 & 6\sqrt[3]{2} \end{pmatrix}$$

Ze Sylvesterova kritéria plyne, že matice je pozitivně definitní a tedy zde je lok. minimum.

2. Najděte lokální extrémy funkcí

   (a) $f(x,y) = 2y^2 - 4xy + x^4 + 3$
   Řešení: První derivace:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -4y + 4x^3$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 4y - 4x$$

Rovnice položíme rovny 0 a najdeme podezřelé body. Vyjde $(0,0)$, $(1,1)$, $(-1,-1)$.
Druhé derivace

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -4$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4$$

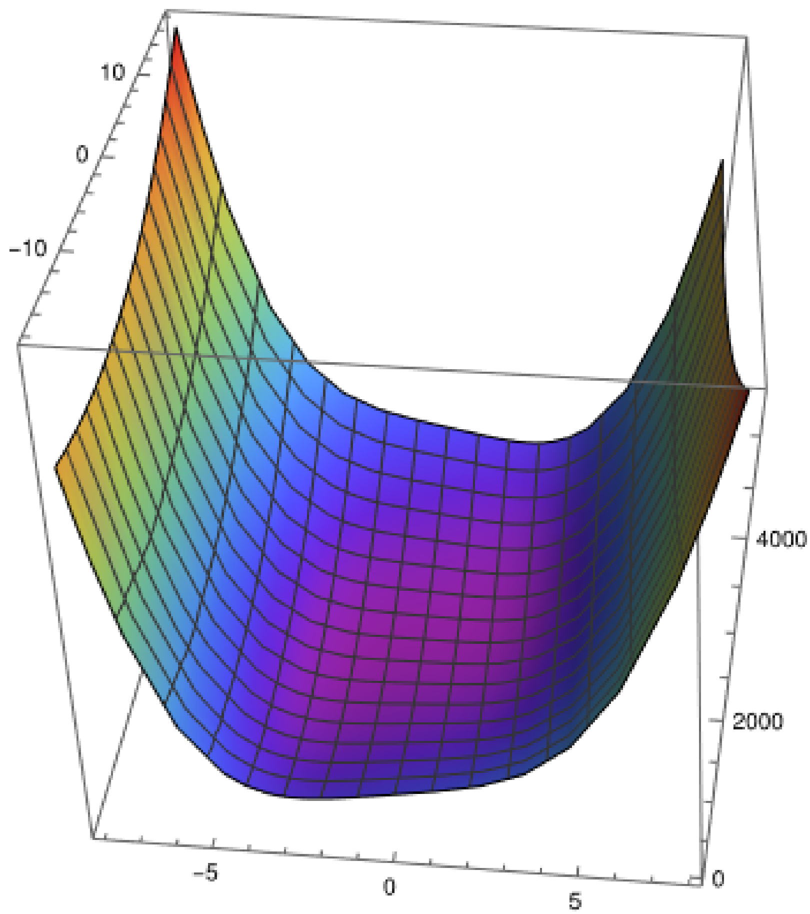
Dosadíme body do Hessovy matice V $(0,0)$:

$$\begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$$

není extrém.
V $(1,1)$:

$$\begin{pmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$$

lok. minimum.



V $(-1,-1)$:

$$\begin{pmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$$

lok. minimum.

(b) $f(x,y) = y^3 + y^2x - x^2 - 4x$

Řešení: První derivace:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2 - 2x - 4$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 + 2yx$$

Rovnice položíme rovny 0 a najdeme podezřelé body. Vyjde $(-2,0)$, $(6,-4)$, $(-\frac{3}{2},1)$.

Druhé derivace

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y + 2x$$

Dosadíme body do Hessovy matice.

V bodě $(-2, 0)$ máme

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

lok. maximum.

V bodě $(6, -4)$ máme

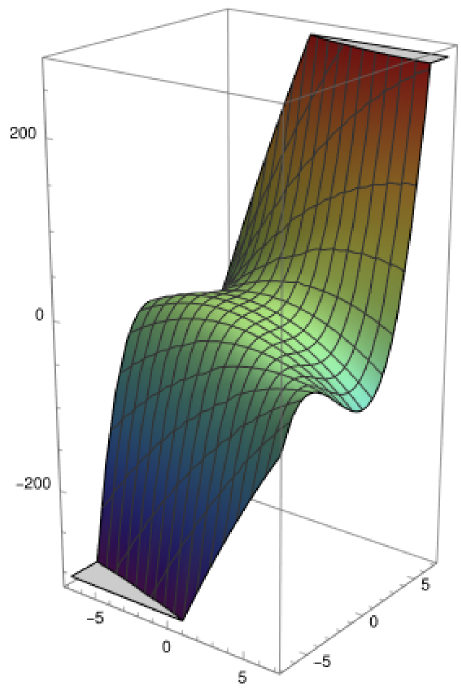
$$\begin{pmatrix} -2 & -8 \\ -8 & -12 \end{pmatrix}$$

není extrém.

V bodě $(-\frac{3}{2}, 1)$ máme

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

není extrém.



(c) $f(x,y) = 2x^3 + 9xy^2 + 15x^2 + 27y^2$

Řešení: První derivace:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6x^2 + 9y^2 + 30x$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 18xy + 54y$$

Rovnice položíme rovny 0 a najdeme podezřelé body. Vyjde $(0,0)$, $(-5,0)$, $(-3,2)$, $(-3,-2)$.

Druhé derivace

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x + 30$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 18y$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 15x + 54$$

Dosadíme body do Hessovy matice.

V bodě $(0,0)$ máme

$$\begin{pmatrix} 30 & 0 \\ 0 & 54 \end{pmatrix}$$

lok. minimum.

V bodě $(-5,0)$ máme

$$\begin{pmatrix} -30 & 0 \\ 0 & -36 \end{pmatrix}$$

lok. maximum.

V bodě $(-3,2)$ máme

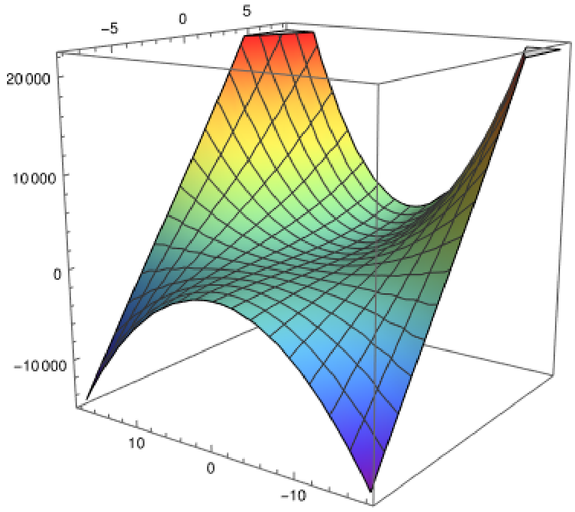
$$\begin{pmatrix} -6 & 36 \\ 36 & 0 \end{pmatrix}$$

není extrém.

V bodě $(-3,-2)$ máme

$$\begin{pmatrix} -6 & -36 \\ -36 & 0 \end{pmatrix}$$

není extrém.



(d) $f(x, y, z) = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z$

Řešení: Příklad máme z http://www.math.muni.cz/~zemanekp/files/SRPzMAII_FRMU.pdf

První derivace:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 12y$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y + 12x$$
$$\frac{\partial f}{\partial z} = 2z + 2$$

Rovnice položíme rovny 0 a najdeme podezřelé body. Vyjde $(0, 0, -1)$, $(24, -144, -1)$.

Druhé derivace

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 12$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 2$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = 0$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = 0$$

Dosadíme body do Hessovy matice. V bodě $(0, 0, -1)$ máme

$$\begin{pmatrix} 0 & 12 & 0 \\ 12 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Není extrém.
V bodě $(24, 144, -1)$ máme

$$\begin{pmatrix} 144 & 12 & 0 \\ 12 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

lok. minimum.

(e) $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3(xy + xz)$

Řešení: Příklad máme z http://projects.math.slu.cz/AM/activ/soubory/opory/VybrPartCv.pdf

První derivace:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3y - 3z$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 3x$$
$$\frac{\partial f}{\partial z} = 3z^2 - 3x$$

Rovnice položíme rovny 0 a najdeme podezřelé body. Vyjde $(0, 0, 0)$, $(\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2})$.
Druhé derivace

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -3$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 6z$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = -3$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = 0$$

Dosadíme body do Hessovy matice. V bodě $(0, 0, 0)$ máme

$$\begin{pmatrix} 0 & -3 & -3 \\ -3 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Není extrém.
V bodě $(\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2})$ máme

$$\begin{pmatrix} 6\sqrt[3]{4} & -3 & -3 \\ -3 & 6\sqrt[3]{2} & 0 \\ -3 & 0 & 6\sqrt[3]{2} \end{pmatrix}$$

lok. minimum.

(f) $f(x,y,z) = x^3 + y^2 + \frac{z^2}{2} - 3xz - 2y + 2z$

Řešení: Příklad máme z https://is.muni.cz/el/1433/podzim2011/MB103/um/Kapitola8_priklady.pdf

První derivace:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3z$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y - 2$$
$$\frac{\partial f}{\partial z} = z - 3x + 2$$

Rovnice položíme rovny 0 a najdeme podezřelé body. Vyjde $(1,1,1)$, $(2,1,4)$.

Druhé derivace

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 1$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = -3$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = 0$$

Dosadíme body do Hessovy matice. V bodě $(1,1,1)$ je

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

není extrém.

V bodě $(2,1,4)$ je

$$\begin{pmatrix} 12 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

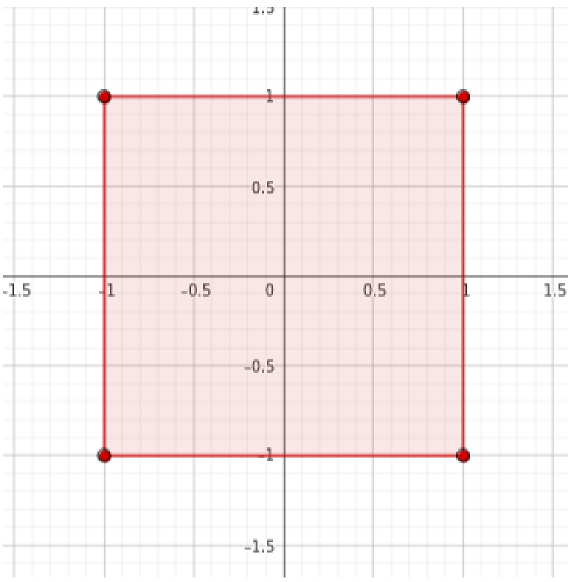
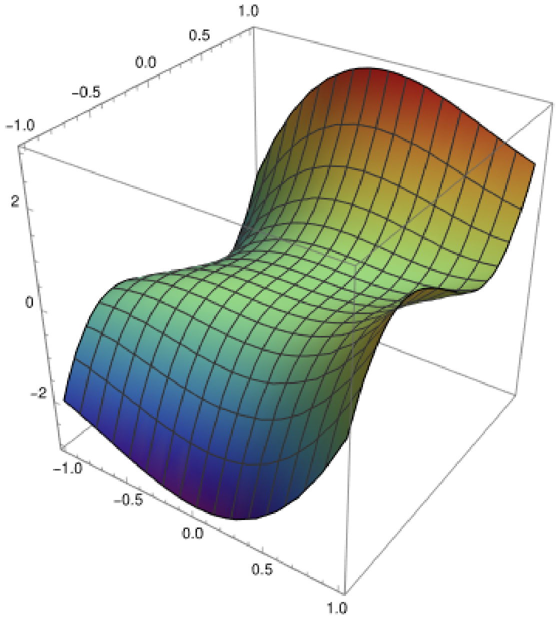
lok. minimum.

3. Najděte extrémy funkcí na množině

(a) $f(x,y) = x^3 - 2x^2y + 3y^3$ na $M = [-1;1]^2$

Řešení: Příklad máme z https://matematika.cuni.cz/dl/ikalkulus/KAP17.pdf

- Množina M je čtverec s vrcholy $(-1,-1)$, $(1,-1)$, $(1,1)$ a $(-1,1)$.
  Funkce $f(x,y)$ je spojitá funkce (polynom). Množina M (v $\mathbb{R}^2$) je uzavřená (součin dvou uzavřených intervalů) a omezená, tedy je kompaktní.
  Tedy f na M nabývá extrémů.

- Nejprve budeme vyšetřovat extrémy na množině $(-1,1)\times(-1,1)$. Parciální derivace:
$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 4xy,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2x^2 + 9y^2.$$
  Rovnice položíme rovny 0 a najdeme podezřelé body. Vyjde bod $(0,0)$. Máme tedy první podezřelý bod.
- Nyní vyšetříme hranici. Tu lze popsat 4 úsečkami. Jejich parametrizaci dosadíme do f.
  i. $y=-1$, $x\in(-1,1)$. Máme
  $$g(x) = f(x,-1) = x^3 + 2x^2 - 3.$$
  Jde o funkci jedné proměnné, její extrémy najdeme pomocí derivace:
  $$g'(x) = 3x^2 + 4x = x(3x+4)$$
  Nulové derivace jsou pro $x=0$ a $x=-\frac{4}{3}$. Druhý bod neleží v M. Dostáváme tedy podezřelý bod $(0,-1)$.
  ii. $y=1$, $x\in(-1,1)$. Máme
  $$g(x) = f(x,1) = x^3 - 2x^2 + 3.$$
  Jde o funkci jedné proměnné, její extrémy najdeme pomocí derivace:
  $$g'(x) = 3x^2 - 4x = x(3x-4)$$

Nulové derivace jsou pro $x = 0$ a $x = \frac{4}{3}$. Druhý bod neleží v M. Dostáváme tedy podezřelý bod $(0, 1)$.

iii. $x = -1$, $y \in (-1, 1)$. Máme

$$g(y) = f(-1, y) = 3y^3 - 2y - 1.$$

Jde o funkci jedné proměnné, její extrémy najdeme pomocí derivace:

$$g'(y) = 9y^2 - 2$$

Nulové derivace jsou pro $y = \pm\frac{1}{3}\sqrt{2}$. Dostáváme tedy podezřelé body $(-1, \frac{1}{3}\sqrt{2})$. a $(-1, -\frac{1}{3}\sqrt{2})$.

iv. $x = 1$, $y \in (-1, 1)$. Máme

$$g(y) = f(1, y) = 3y^3 - 2y + 1.$$

Jde o funkci jedné proměnné, její extrémy najdeme pomocí derivace:

$$g'(y) = 9y^2 - 2$$

Nulové derivace jsou pro $y = \pm\frac{1}{3}\sqrt{2}$. Dostáváme tedy podezřelé body $(1, \frac{1}{3}\sqrt{2})$. a $(1, -\frac{1}{3}\sqrt{2})$.

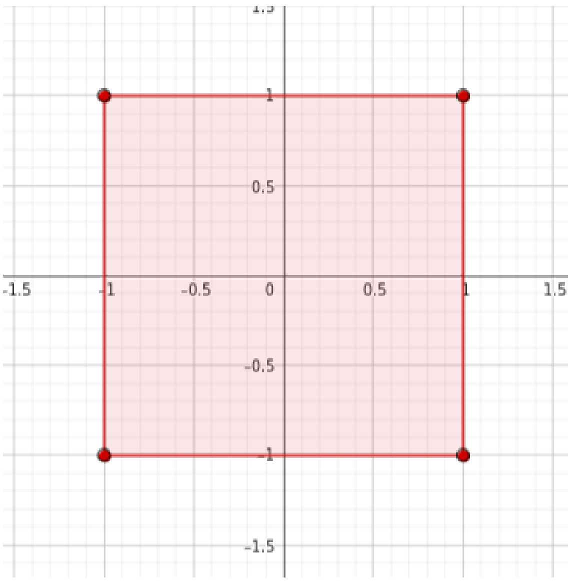
- Přidáme vrcholy čtverce. Tedy podezřelé body: $(-1, -1)$, $(1, -1)$, $(1, 1)$ a $(-1, 1)$.
- Porovnáme hodnoty ve všech podezřelých bodech:

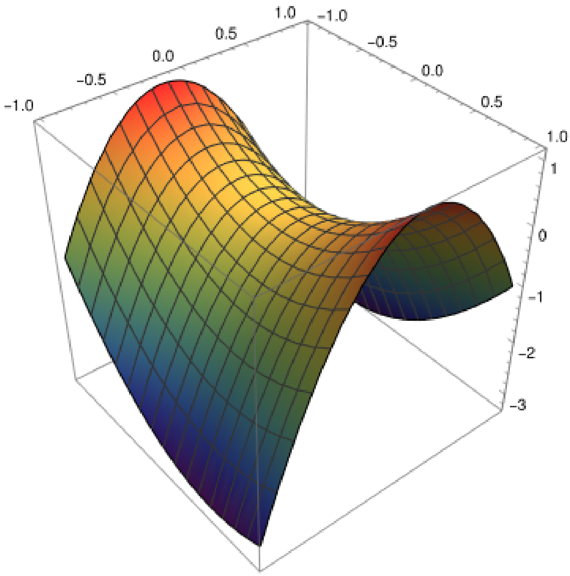
$$\begin{aligned}
f(0,0) &= 0,\\
f(-1,1) &= 0,\\
f(1,1) &= 2,\\
f(1,-1) &= 0,\\
f(-1,-1) &= -2,\\
f(0,1) &= 3,\\
f(0,-1) &= -3,\\
f(-1, \frac{1}{3}\sqrt{2}) &= -1 - \frac{4}{9}\sqrt{2}\\
f(-1, -\frac{1}{3}\sqrt{2}) &= \frac{4}{9}\sqrt{2} - 1\\
f(1, \frac{1}{3}\sqrt{2}) &= 1 - \frac{4}{9}\sqrt{2}\\
f(1, -\frac{1}{3}\sqrt{2}) &= 1 + \frac{4}{9}\sqrt{2}
\end{aligned}$$

- Závěr: globální maximum je v bodě $(0, 1)$, $f(0, 1) = 3$ a minimum v $(0, -1)$, $f(0, -1) = -3$.

(b) $f(x, y) = x^2 - 3y^2 + xy$ na $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$

Řešení: Příklad máme z Petr Holický, Ondřej F.K. Kalenda : Metody řešení vybraných úloh z matematické analýzy pro 2. - 4. semestr





- Množina M je čtverec s vrcholy $(-1,-1)$, $(1,-1)$, $(1,1)$ a $(-1,1)$.
  Funkce $f(x,y)$ je spojitá funkce (polynom). Množina M (v $\mathbb{R}^2$) je uzavřená (součin dvou uzavřených intervalů) a omezená, tedy je kompaktní.
  Tedy f na M nabývá extrémů.
- Nejprve budeme vyšetřovat extrémy na množině $(-1,1)\times(-1,1)$. Parciální derivace:
$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + y,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = -6y + x$$
  Rovnice položíme rovny 0 a najdeme podezřelé body. Vyjde bod $(0,0)$. Máme tedy první podezřelý bod.
- Nyní vyšetříme hranici. Tu lze popsat 4 úsečkami. Jejich parametrizaci dosadíme do f.
  i. $y=-1$, $x\in(-1,1)$. Máme
$$g(x) = f(x,-1) = x^2 - x - 3$$
  Jde o funkci jedné proměnné, její extrémy najdeme pomocí derivace:
$$g'(x) = 2x - 1$$
  Nulové derivace jsou pro $x=0$ a $x=\frac{1}{2}$. Dostáváme tedy podezřelý bod $(\frac{1}{2},-1)$.
  ii. $y=1$, $x\in(-1,1)$. Máme
$$g(x) = f(x,1) = x^2 + x - 3.$$
  Jde o funkci jedné proměnné, její extrémy najdeme pomocí derivace:
$$g'(x) = 2x + 1$$
  Nulové derivace jsou pro $x=-\frac{1}{2}$. Dostáváme tedy podezřelý bod $(-\frac{1}{2},1)$.

iii. $x = -1$, $y \in (-1, 1)$. Máme

$$g(y) = f(-1, y) = 1 - y - 3y^2$$

Jde o funkci jedné proměnné, její extrémy najdeme pomocí derivace:

$$g'(y) = -1 - 6y$$

Nulové derivace jsou pro $y = -\frac{1}{6}$. Dostáváme tedy podezřelé body $(-1, -\frac{1}{6})$.

iv. $x = 1$, $y \in (-1, 1)$. Máme

$$g(y) = f(1, y) = 1 + y - 3y^2$$

Jde o funkci jedné proměnné, její extrémy najdeme pomocí derivace:

$$g'(y) = 1 - 6y$$

Nulové derivace jsou pro $y = \frac{1}{6}$. Dostáváme tedy podezřelé body $(1, \frac{1}{6})$.

- Přidáme vrcholy čtverce. Tedy podezřelé body: $(-1, -1)$, $(1, -1)$, $(1, 1)$ a $(-1, 1)$.
- Porovnáme hodnoty ve všech podezřelých bodech:

$$\begin{aligned} f(0,0) &= 0, \\ f(-1,1) &= -3, \\ f(1,1) &= -1, \\ f(1,-1) &= -3, \\ f(-1,-1) &= -1, \\ f(\frac{1}{2},-1) &= -\frac{13}{4}, \\ f(-\frac{1}{2},1) &= -\frac{13}{4}, \\ f(-1,-\frac{1}{6}) &= \frac{13}{12}, \\ f(1,\frac{1}{6}) &= \frac{13}{12}, \end{aligned}$$

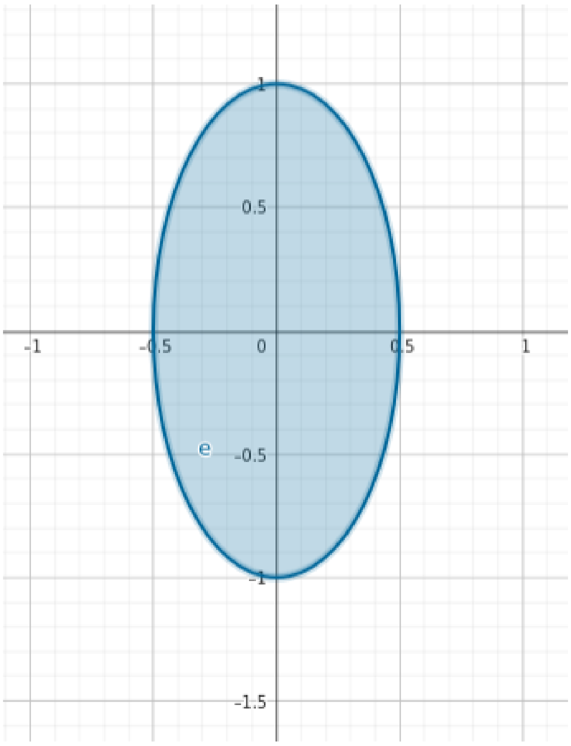
- Závěr: globální maximum je v bodech $(1, \frac{1}{6})$ a $(-1, -\frac{1}{6}$ a má hodnotu $13/12$. Minimum v $(-\frac{1}{2}, 1)$ a $(\frac{1}{2}, -1)$ a má hodnotu $-13/4$.

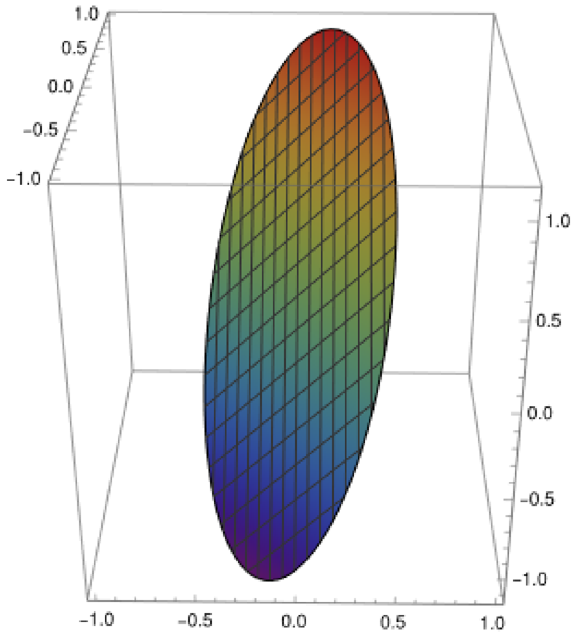
(c) $f(x, y) = x + y$ na $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + y^2 \leq 1\}$

Řešení: Příklad máme z Petr Holický, Ondřej F.K. Kalenda : Metody řešení vybraných úloh z matematické analýzy pro 2. - 4. semestr

- Množina M je elipsa o středu v počátku.
  Funkce $f(x, y)$ je spojitá funkce (polynom). Množina M (v $\mathbb{R}^2$) je uzavřená: Jde o vzor uzavřené množiny A při spojitém zobrazení g, konkrétně $A = (-\infty, 1]$, $g(x, y) = 4x^2 + y^2$, pak

$$M = g^{-1}((-\infty, 1]).$$





Zároveň je M omezená:

$$x^2 + y^2 \leq 4x^2 + y^2 \leq 1.$$

Tedy je M kompaktní.
Tedy f na M nabývá extrémů.

- Nejprve budeme vyšetřovat extrémy na množině $4x^2 + y^2 < 1$. Parciální derivace:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 1$$

  Rovnice tedy nejsou nikde nulové a na vnitřku M nemáme žádný podezřelý bod.

- Nyní vyšetříme hranici. To jsou body splňující $4x^2 + y^2 = 1$.
  Hranici popíšeme pomocí polárních souřadnic:

$$x = \frac{1}{2}\cos t,$$
$$y = \sin t, \qquad t \in [0, 2\pi)$$

  Pak máme

$$4 \cdot \left(\frac{1}{2}\cos t\right)^2 + \sin^2 t = 1$$

  Dosadíme do funkce f. Tedy

$$g(t) = f\left(\frac{1}{2}\cos t, \sin t\right) = \frac{1}{2}\cos t + \sin t.$$

Zderivujeme, abychom našli extrémy.

$$g'(t) = -\frac{1}{2}\sin t + \cos t.$$

Nulové body:

$$\sin t = 2\cos t.$$

Protože $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$, tak řešením je: $\sin t = \frac{2}{\sqrt{5}}$ a $\cos t = \frac{1}{\sqrt{5}}$ nebo $\sin t = -\frac{2}{\sqrt{5}}$ a $\cos t = -\frac{1}{\sqrt{5}}$.
Celkem tedy dostáváme podezřelé body $((x,y))$: $(\frac{1}{2\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})$ a $(-\frac{1}{2\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}})$.

- Přidáme „hranici hranice“, tedy bod $t = 0$, $(\frac{1}{2}, 0)$
- Porovnáme hodnoty ve všech podezřelých bodech:

$$f(\frac{1}{2\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}) = \frac{\sqrt{5}}{2}$$
$$f(-\frac{1}{2\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}) = -\frac{\sqrt{5}}{2}$$
$$f(\frac{1}{2}, 0) = \frac{1}{2}$$

- Závěr: globální maximum je v bodě $(\frac{1}{2\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})$ a má hodnotu $\frac{\sqrt{5}}{2}$, minimum je v bodě $(-\frac{1}{2\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}})$ a má hodnotu $-\frac{\sqrt{5}}{2}$

(d) $f(x,y) = x^2 - 3y^2 - x + 18y + 4$ na $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq y \leq 4\}$
Řešení: Příklad máme z http://www.math.muni.cz/~zemanekp/files/SRPzMAII_FRMU.pdf

- Množina M je trojúhelník s vrcholy $(0,0)$, $(4,4)$ a $(0,4)$.
Funkce $f(x,y)$ je spojitá funkce (polynom). Množina M (v $\mathbb{R}^2$) je uzavřená: jde o průník tří polorovin, které jsou uzavřené množiny. Konkrétně:

$$M_1 = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\} = g_1^{-1}([0,\infty)), \qquad g_1(x,y) = x$$
$$M_2 = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : y \leq 4\} = g_2^{-1}((-\infty,4]), \qquad g_2(x,y) = y$$

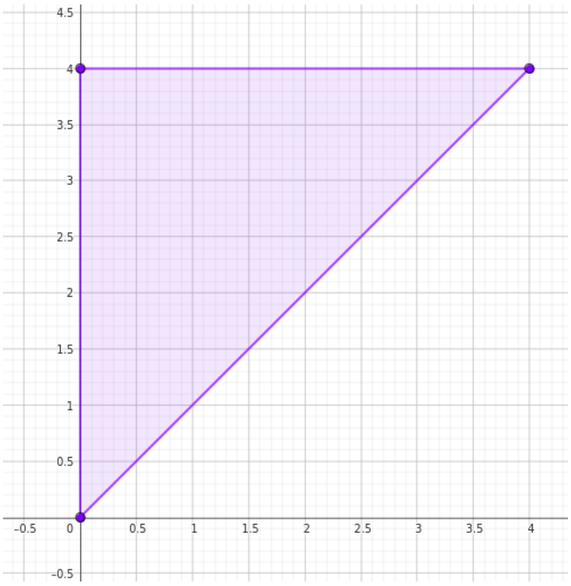
a

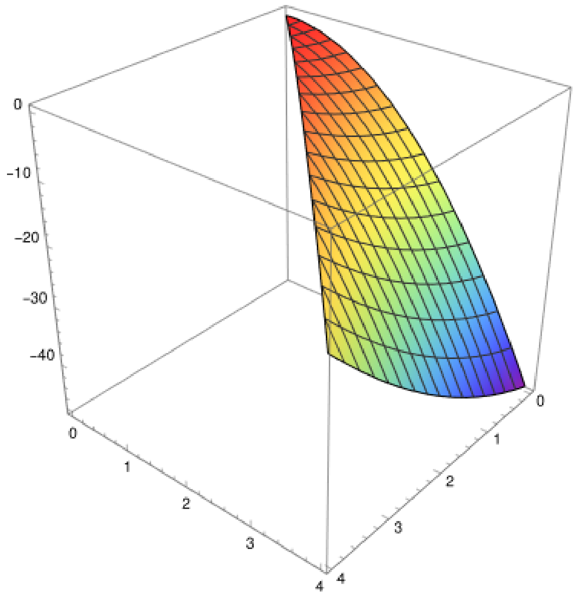
$$M_3 = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : x \leq y\} = g_3^{-1}([0,\infty)), \qquad g_3(x,y) = y - x$$

Tedy $M = M_1 \cap M_2 \cap M_3$. Průnik 3 uzavřených množin je uzavřená množina.
Množina je zároveň omezená: $0 \leq x \leq 4$, $0 \leq y \leq 4$.
Tedy je M kompaktní.
Tedy f na M nabývá extrémů.
- Nejprve budeme vyšetřovat extrémy na vnitřku množiny. Parciální derivace:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 1,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = -6y + 18$$

Rovnice položíme rovny 0 a najdeme podezřelé body. Vyjde bod $(\frac{1}{2}, 3)$. Máme tedy první podezřelý bod.





- Nyní vyšetříme hranici. Tu lze popsat 3 úsečkami. Jejich parametrizaci dosadíme do f.
  i. $x = 0$, $y \in (0, 4)$. Máme
  $$g(y) = f(0, y) = -3y^2 + 18y + 4$$
  Jde o funkci jedné proměnné, její extrémy najdeme pomocí derivace:
  $$g'(y) = -6y + 18$$
  Nulové derivace jsou pro $y = 3$. Dostáváme tedy podezřelý bod $(0, 3)$.
  ii. $y = 4$, $x \in (0, 4)$. Máme
  $$g(x) = f(x, 4) = x^2 - x + 28.$$
  Jde o funkci jedné proměnné, její extrémy najdeme pomocí derivace:
  $$g'(x) = 2x - 1$$
  Nulové derivace jsou pro $x = \frac{1}{2}$. Dostáváme tedy podezřelý bod $(\frac{1}{2}, 4)$.
  iii. $y = x$, $x \in (0, 4)$. Máme
  $$g(x) = f(x, x) = -2x^2 + 17x + 4$$
  Jde o funkci jedné proměnné, její extrémy najdeme pomocí derivace:
  $$g'(x) = -4x + 17$$
  Nulové derivace jsou pro $x = 17/4$. Dostáváme tedy podezřelý bod $(17/4, 17/4)$, který ale neleží v M.
- Přidáme vrcholy trojúhelníka. Tedy podezřelé body: $(0, 0)$, $(4, 4)$ a $(0, 4)$.

- Porovnáme hodnoty ve všech podezřelých bodech:

$$\begin{aligned} f(0,0) &= 4, \\ f(4,4) &= 40, \\ f(0,4) &= 28, \\ f(\frac{1}{2},3) &= 123/4, \\ f(\frac{1}{2},4) &= 111/4, \\ f(0,3) &= 31, \end{aligned}$$

- Závěr: globální maximum je v bodě $(4,4)$ a má hodnotu 40. Minimum v $(0,0)$ a má hodnotu 4.

(e) $f(x,y) = (x-y)^2 + x^2$ na M,
kde M je čtverec s vrcholy $A = [2,0]$, $B = [0,2]$, $C = [-2,0]$, $D = [0,-2]$
Řešení: Příklad máme z http://www.math.muni.cz/~zemanekp/files/SRPzMAII_FRMU.pdf

- Množina M je čtverec postavený na špičku s vrcholy $(2,0)$, $(0,2)$, $(-2,0)$, a $(0,-2)$.
  Funkce $f(x,y)$ je spojitá funkce (polynom). Množina M (v $\mathbb{R}^2$) je uzavřená: jde o průník dvou uzavřených množin. Konkrétně:

$$M_1 = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : x-2 \le y \le x+2\} = g_1^{-1}([-2,2]), \qquad g_1(x,y) = y - x$$

a

$$M_2 = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : -x-2 \le y \le -x+2\} = g_2^{-1}([-2,2]), \qquad g_1(x,y) = y + x$$

  Tedy $M = M_1 \cap M_2$. Průnik 2 uzavřených množin je uzavřená množina.
  Množina je zároveň omezená: $-2 \le x \le 2$, $-2 \le y \le 2$.
  Tedy je M kompaktní.
  Tedy f na M nabývá extrémů.
- Nejprve budeme vyšetřovat extrémy na vnitřku množiny. Parciální derivace:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 4x - 2y, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= -2x - 2y \end{aligned}$$

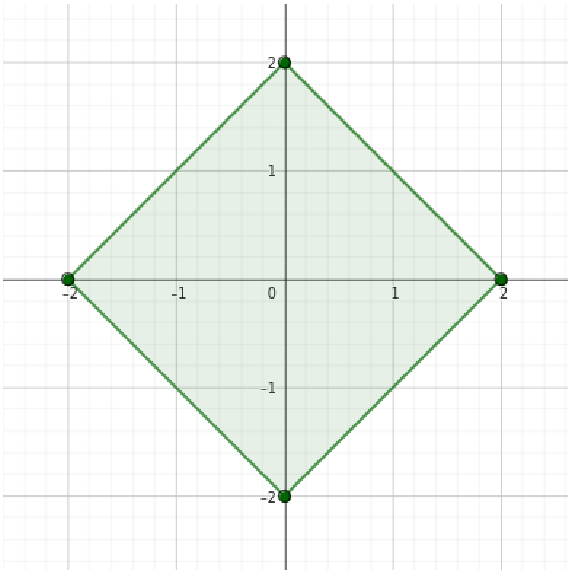
  Rovnice položíme rovny 0 a najdeme podezřelé body. Vyjde bod $(0,0)$. Máme tedy první podezřelý bod.
- Nyní vyšetříme hranici. Tu lze popsat 4 úsečkami. Jejich parametrizaci dosadíme do f.
  i. $y = -x + 2$, $x \in (0,2)$. Máme

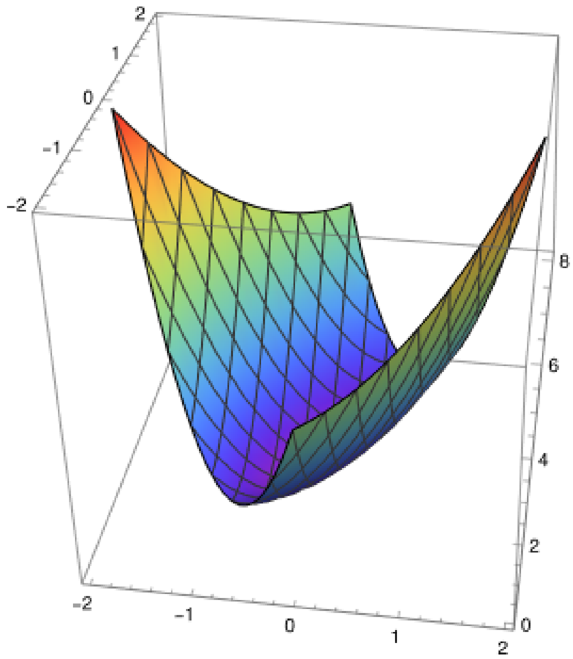
$$g(x) = f(x, -x+2) = (2x-2)^2 + x^2$$

  Jde o funkci jedné proměnné, její extrémy najdeme pomocí derivace:

$$g'(x) = 10x - 8$$

  Nulové derivace jsou pro $x = 4/5$. Dostáváme tedy podezřelý bod $(4/5, 6/5)$.





ii. $y = x + 2$, $x \in (-2, 0)$. Máme

$$g(x) = f(x, x + 2) = 4 + x^2$$

Jde o funkci jedné proměnné, její extrémy najdeme pomocí derivace:

$$g'(x) = 2x$$

Nulové derivace jsou pro $x = 0$. Tento bod neleží na vnitřku dané úsečky, tedy jej budeme uvažovat až později (jako vrchol čtverce).

iii. $y = -x - 2$, $x \in (-2, 0)$. Máme

$$g(x) = f(x, -x - 2) = (2x + 2)^2 + x^2$$

Jde o funkci jedné proměnné, její extrémy najdeme pomocí derivace:

$$g'(x) = 10x + 8$$

Nulové derivace jsou pro $x = -4/5$. Dostáváme tedy podezřelý bod $(-4/5, -6/5)$.

iv. $y = x - 2$, $x \in (0, 2)$. Máme

$$g(x) = f(x, x - 2) = 4 + x^2$$

Jde o funkci jedné proměnné, její extrémy najdeme pomocí derivace:

$$g'(x) = 2x$$

Nulové derivace jsou pro $x = 0$. Tento bod neleží na vnitřku dané úsečky, tedy jej budeme uvažovat až později (jako vrchol čtverce).

- Přidáme vrcholy čtverce. Tedy podezřelé body: $(2,0)$, $(0,2)$, $(-2,0)$, a $(0,-2)$.
- Porovnáme hodnoty ve všech podezřelých bodech:

$$\begin{aligned} f(0,0) &= 0, \\ f(2,0) &= 8, \\ f(0,2) &= 4, \\ f(-2,0) &= 8, \\ f(0,-2) &= 4, \\ f(4/5,6/5) &= 4/5, \\ f(-4/5,-6/5) &= 4/5, \end{aligned}$$

- Závěr: globální maximum je v bodech $(2,0)$ a $(-2,0)$ a má hodnotu 8. Minimum v $(0,0)$ a má hodnotu 0.

(f) $f(x,y) = x^2 - xy + y^2$ na $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$

Hint: polární souřadnice

Řešení: Příklad máme z https://www.karlin.mff.cuni.cz/~bouchala/Vyuka/

- Množina M je kruh o středu v počátku a poloměru 1.
  Funkce $f(x,y)$ je spojitá funkce (polynom). Množina M (v $\mathbb{R}^2$) je uzavřená: Jde o vzor uzavřené množiny A při spojitém zobrazení g, konkrétně $A = (-\infty, 1]$, $g(x,y) = x^2 + y^2$, pak

$$M = g^{-1}((-\infty, 1]).$$

  Zároveň je M omezená:

$$x^2 + y^2 \leq x^2 + y^2 \leq 1.$$

  Tedy je M kompaktní.
  Tedy f na M nabývá extrémů.
- Nejprve budeme vyšetřovat extrémy na množině $x^2+y^2 < 1$. Parciální derivace:

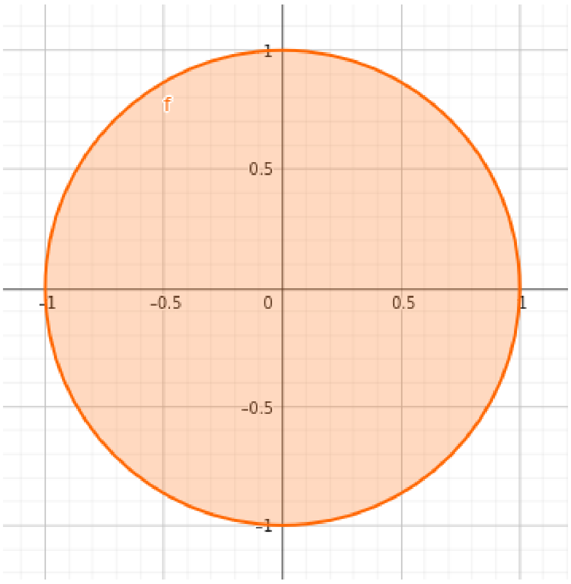
$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 2x - y \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 2y - x \end{aligned}$$

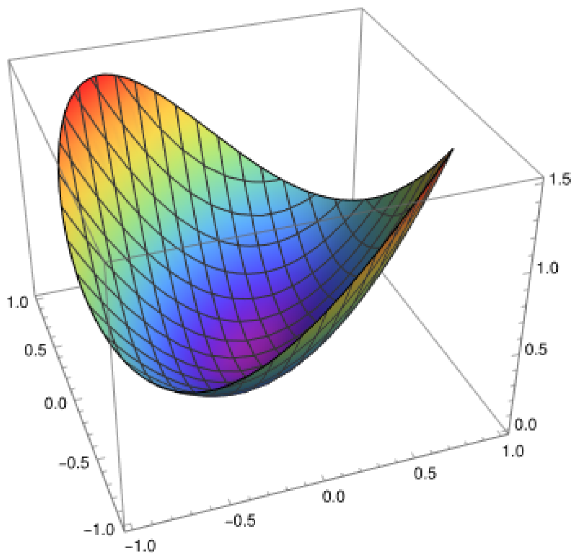
  Řešením je bod $(0,0)$, máme tedy první podezřelý bod.
- Nyní vyšetříme hranici. To jsou body splňující $x^2 + y^2 = 1$.
  Hranici popíšeme pomocí polárních souřadnic:

$$\begin{aligned} x &= \cos t, \\ y &= \sin t, \qquad t \in [0, 2\pi) \end{aligned}$$

  Dosadíme do funkce f. Tedy

$$g(t) = f(\cos t, \sin t) = 1 - \sin t \cos t$$





Zderivujeme, abychom našli extrémy.

$$g'(t) = \sin^2 t - \cos^2 t = -\cos(2t)$$

Nulové body:

$$\cos(2t) = 0.$$

Řešením je: $t = \frac{\pi}{4}$, $t = \frac{3\pi}{4}$, $t = \frac{5\pi}{4}$, $t = \frac{7\pi}{4}$.
Celkem tedy dostáváme podezřelé body $((x,y))$: $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$, $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ a $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$,

- Přidáme „hranici hranice“, tedy bod $t = 0$, $(1, 0)$.
- Porovnáme hodnoty ve všech podezřelých bodech:

$$\begin{aligned} f(0,0) &= 0 \\ f(1,0) &= 1 \\ f(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) &= \frac{1}{2} f(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}) &= \frac{3}{2} \\ f(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}) &= \frac{1}{2} f(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

- Závěr: globální maximum je v bodech $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$, $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, minimum je v bodě $(0,0)$ a má hodnotu 0.

Bonus

4. Najděte lokální extrémy funkce $f(x,y,z) = x^3 + y^2 + z^2 + 6xy + 2z$

Hint: V $[0,0,-1]$ zkoumáme přímku $[x,0,-1]$.

Řešení: První derivace:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 6y$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y + 6x$$
$$\frac{\partial f}{\partial z} = 2z + 2$$

Rovnice položíme rovny 0 a najdeme podezřelé body. Vyjde $(0, 0, -1)$, $(6, -18, -1)$.

Druhé derivace

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 2$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 6$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = 0$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = 0$$

Dosadíme body do Hessovy matice. V bodě $(6, -18, -1)$ je

$$\begin{pmatrix} 36 & 6 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

lokální minimum.

V bodě $(0, 0, -1)$ je

$$\begin{pmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Nyní buď ukážeme, že matice je indefinitní (technikami z lineární algebry), nebo zkusíme vyšetřit funkci na nějaké vhodné přímce. Uvažujme tedy přímku $(x, 0, -1)$. Tato přímka prochází bodem $(0, 0, -1)$. Po dosazení dostaneme

$$f(x, 0, -1) = x^3 + 1 - 2 = x^3 - 1.$$

Jde o funkci jedné proměnné, která v bodě $x = 0$ nemá ani maximum, ani minimum. Tedy ani původní funkce (3 proměnných) nemůže mít v bodě $(0, 0, -1)$ maximum ani minimum.

5. Ukažte, že funkce $f(x, y) = (x - y^2)(2x - y^2)$ má v $[0, 0]$ lok. minimum vzhledem ke všem přímkám, ale nemá tam minimum.

   Hint: Zkoumejte hodnoty na křivce $[\frac{3}{4}y^2, y]$.

Řešení: Hodnoty na přímkách: zkoumáme funkci tvaru

$$g(x) = f(x, kx) = (x - k^2x^2)(2x - k^2x^2) = 2x^2 + k^4x^4 - 3xk^2x^3.$$

Jde vlastně o funkci jedné proměnné, tedy

$$\begin{aligned} g'(x) &= 4x + 4k^4x^3 - 9k^2x^2, \qquad & g'(0) &= 0 \\ g''(x) &= 4 + 12k^4x^2 - 18k^2x, \qquad & g''(0) &= 4 \end{aligned}$$

Tedy jde o lok. minimum.

Speciální případ: přímka $x = 0$, pak $f(0, y) = y^4$, zjevně jde o lok. minimum.

Ale na křivce $(\frac{3}{4}y^2, y)$ dostaneme

$$f(\frac{3}{4}y^2, y) = -\frac{1}{8}y^4,$$

tedy zřejmě jde o lok. maximum.

6. Najděte Hessovu matici v následujících funkcí $[0, 0]$ a diskutujte existenci maxima/minima/sedla vzhledem k semidefinitnosti matice.

   (a) $x^4 + y^4$
   Řešení: Hessova matice je tvaru

   $$\begin{pmatrix} 12x^2 & 0 \\ 0 & 12y^2 \end{pmatrix}$$

   tedy v $(0, 0)$ je

   $$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   V bodě je lok. minimum (tvar „mistička“).

   (b) $-x^4 - y^4$ **Řešení:** Hessova matice je tvaru

   $$\begin{pmatrix} -12x^2 & 0 \\ 0 & -12y^2 \end{pmatrix}$$

   tedy v $(0, 0)$ je

   $$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   V bodě je lok. maximum (tvar „kopeček“).

   (c) $x^4 - y^4$ **Řešení:** Hessova matice je tvaru

   $$\begin{pmatrix} 12x^2 & 0 \\ 0 & -12y^2 \end{pmatrix}$$

tedy v $(0,0)$ je

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

V bodě není extrém (tvar „sedlo“).

Závěr: Ve všech případech vyšla semidefinitní matice, přitom se tam nalézalo lok. minimum, maximum i sedlo. Ze semidefinitní matice tedy nelze o existenci extrémů nic říct.