11. cvičení – Extrémy

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Teorie

Věta 1 (Nutná podmínka existence extrému)**.** Nechť $n \in \mathbb{N}$, $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená, $a \in G$ a $i \in \{1, \cdots, n\}$. Nechť funkce $f : G \to \mathbb{R}$ má v bodě a lokální extrém. Potom buď $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ neexistuje nebo $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$.

Věta 2 (Postačující podmínky pro lokální extrém)**.** Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená, $a \in G$ a nechť $f \in C^2(G)$. Nechť $\operatorname{grad} f(a) = 0$. Pak

1. Je-li kvadratická forma $f''(a)$ **positivně definitní**, pak funkce f nabývá v bodě a svého ostrého **lokálního minima**.
2. Je-li kvadratická forma $f''(a)$ **negativně definitní**, pak funkce f nabývá v bodě a svého ostrého **lokálního maxima**.
3. Je-li kvadratická forma $f''(a)$ **indefinitní**, pak funkce f **nenabývá** v bodě a lokálního extrému.

Poznámka 3 (Sylvesterovo kritérium)**.** Nechť $\mathbf{A}$ je symetrická matice reálných čísel typu (n, n). Označme $\{D_k\}$ posloupnost determinantů levých horních rohů. Pak

1. $\mathbf{A}$ je positivně definitní, právě když všechna $D_k > 0$;
2. $\mathbf{A}$ je negativně definitní, právě když $D_1 < 0$, $D_2 > 0$, $D_3 < 0 \dots$;
3. jestliže všechny hlavní subdeterminanty jsou **nenulové** a navíc nenastaly předchozí případy, pak $\mathbf{A}$ je indefinitní.

Algoritmus: Lokální extrémy (v závorce dimenze pro funkci 2 proměnných):

1. **Zderivujeme** - máme (dvě) parciální derivace.
2. Položíme derivace **rovny nule**. Vyřešíme soustavu a najdeme **podezřelé body**.
3. Vytvoříme **matici druhých derivací** (2x2).
4. **Dosadíme** podezřelé body. Pro každý dostaneme matici. Vyhodnotíme ji Sylvesterovým kritériem (příp. technikami z lingebry) - zjistíme **definitnost**. Tím vyšetříme podezřelé body a získáme lokální extrémy nebo sedla.
5. Pokud je matice semidefinitní, vyšetříme funkci „nějak jinak“.
6. Sepíšeme **závěr**.

Algoritmus: Extrémy na omezené množině:

1. Je-li množina uzavřená, tak odůvodníme, že **spojitá** funkce na **kompaktu** nabývá extrémy.
2. Extrémy mohou být:
   (a) na **vnitřku** množiny jen v místech s nulovými derivacemi (jejich typ nevyšetřujeme, pokud na to nejsme přímo tázáni);
   (b) v bodech vnitřku, kde **neexistuje derivace**;
   (c) na **hranici**: hraniční křivky (nebo plochy) - obvykle lze dosadit a výraz zjednodušit.

(d) na hranici hranice: **krajní body**, hroty trojúhelníku atp.

3. Všechny podezřelé body sepíšeme a **porovnáme** jejich funkční hodnoty. Vybereme maximum a minimum.

Příklady

1. Najděte lokální extrémy funkcí

   (a) $f(x,y) = x^2 + (y-1)^2$
   (b) $f(x,y) = x^2 - (y-1)^2$
   (c) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$
   (d) $f(x,y) = e^{-x^2-y^2}(2y^2 + x^2)$
   (e) $f(x,y) = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}$, $x, y > 0$
   (f) $f(x,y) = (x-y+1)^2$
   (g) $f(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3(xy + xz)$

2. Najděte lokální extrémy funkcí (procvičování na doma)

   (a) $f(x,y) = 2y^2 - 4xy + x^4 + 3$
   (b) $f(x,y) = y^3 + y^2x - x^2 - 4x$
   (c) $f(x,y) = 2x^3 + 9xy^2 + 15x^2 + 27y^2$
   (d) $f(x,y,z) = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z$
   (e) $f(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3(xy + xz)$
   (f) $f(x,y,z) = x^3 + y^2 + \dfrac{z^2}{2} - 3xz - 2y + 2z$

3. Najděte extrémy funkcí na množině

   (a) $f(x,y) = x^3 - 2x^2y + 3y^3$ na $M = [-1;1]^2$
   (b) $f(x,y) = x^2 - 3y^2 + xy$ na $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$
   (c)♡ $f(x,y) = x + y$ na $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + y^2 \leq 1\}$
   Hint: zobecněné polární souřadnice
   (d) $f(x,y) = x^2 - 3y^2 - x + 18y + 4$ na $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq y \leq 4\}$
   (e) $f(x,y) = (x-y)^2 + x^2$ na M,
   kde M je čtverec s vrcholy $A = [2,0]$, $B = [0,2]$, $C = [-2,0]$, $D = [0,-2]$
   (f)❀ $f(x,y) = x^2 - xy + y^2$ na $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$
   Hint: polární souřadnice

Bonus

4. Najděte lokální extrémy funkce $f(x,y,z) = x^3 + y^2 + z^2 + 6xy + 2z$
   Hint: V $[0,0,-1]$ zkoumáme přímku $[x,0,-1]$.

5. Ukažte, že funkce $f(x,y) = (x-y^2)(2x-y^2)$ má v $[0,0]$ lok. minimum vzhledem ke všem přímkám, ale nemá tam minimum.
   Hint: Zkoumejte hodnoty na křivce $[\frac{3}{4}y^2, y]$.

6. Najděte Hessovu matici v následujících funkcí $[0,0]$ a diskutujte existenci maxima/minima/sedla vzhledem k semidefinitnosti matice.

   (a) $x^4 + y^4$
   (b) $-x^4 - y^4$
   (c) $x^4 - y^4$

(3c) $x = \frac{1}{2}\cos t$, $y = \sin t$, $t \in [0, \frac{\pi}{2})$, pak nehledejte hodnoty t, stačí hodnoty pro $\cos t$, $\sin t$
(3f) $x = \cos t$, $y = \sin t$, $t \in [0, \frac{\pi}{2})$