10. cvičení – Více implicitních funkcí

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Příklady

1. Jsou dány vztahy

$$
\begin{aligned}
e^{u/x}\cos(v/y) &= \frac{x}{\sqrt{2}}\\
e^{u/x}\sin(v/y) &= \frac{y}{\sqrt{2}}
\end{aligned}
$$

Dokažte, že vztahy definují na okolí bodu $[1,1,0,\frac{\pi}{4}]$ funkce $u(x,y)$ a $v(x,y)$ třídy C^∞. Spočtěte parciální derivace $\frac{\partial u}{\partial x}$ a $\frac{\partial v}{\partial x}$.

Řešení: Příklad i s řešením máme z: https://www.karlin.mff.cuni.cz/~pick/analyza.pdf

- Uvažujme $F:\mathbb{R}^{2+2}\to\mathbb{R}^2$, $F:(F_1,F_2)$, kde

$$
\begin{aligned}
F_1(x,y,u,v) &= e^{u/x}\cos(v/y) - \frac{x}{\sqrt{2}}\\
F_2(x,y,u,v) &= e^{u/x}\sin(v/y) - \frac{y}{\sqrt{2}}
\end{aligned}
$$

Pak $F\in\mathcal{C}^\infty\big((0,\infty)\times(0,\infty)\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\big)$.
Dále $F(1,1,0,\frac{\pi}{4})=[0,0]$.
Sestavme matici:

$$
\begin{pmatrix}
\frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial v}\\
\frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial v}
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
\frac{1}{x}e^{u/x}\cos(v/y) & -\frac{1}{y}e^{u/x}\sin(v/y)\\
\frac{1}{x}e^{u/x}\sin(v/y) & \frac{1}{y}e^{u/x}\cos(v/y)
\end{pmatrix}
$$

V bodě $(1,1,0,\frac{\pi}{4})$ dostáváme determinant

$$
\begin{vmatrix}
\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\
\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}
\end{vmatrix} = 1 \neq 0.
$$

Z věty o implicitních funkcích tedy existuje okolí U bodu $(1,1)$ a okolí V bodu $(0,\frac{\pi}{4})$ takové, že pro každé $(x,y)\in U$ existuje právě jedno $(u,v)=\varphi(x,y)\in V$ splňující $F(x,y,u,v)=0$. Označíme-li složky φ jako $u(x,y)$ a $v(x,y)$, dostáváme funkce třídy $\mathcal{C}^\infty$ na U.

- Zderivujme podle proměnné x rovnice :

$$
\begin{aligned}
e^{u/x}\cos(v/y) &= \frac{x}{\sqrt{2}}\\
e^{u/x}\sin(v/y) &= \frac{y}{\sqrt{2}}
\end{aligned}
$$

Dostáváme

$$e^{u/x}\frac{u_x x - u}{x^2}\cos(v/y) + e^{u/x}(-\sin(v/y))\frac{1}{y}v_x - \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$$
$$e^{u/x}\frac{u_x x - u}{x^2}\sin(v/y) + e^{u/x}\cos(v/y)\frac{1}{y}v_x = 0$$

Dosadíme $x = 1$, $y = 1$, $u(1,1) = 0$, $v(1,1) = \frac{\pi}{4}$. Máme

$$u_x(1,1)\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}v_x(1,1) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$u_x(1,1)\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}v_x(1,1) = 0.$$

Odtud

$$u_x(1,1) = \frac{1}{2},$$
$$v_x(1,1) = -\frac{1}{2}.$$

2. Ukažte, že existují funkce $u(x,y)$ a $v(x,y)$ definované na nějakém okolí U bodu $[1,2]$, které jsou na U třídy C^1, splňují $u(1,2) = 0$, $v(1,2) = 0$ a platí pro ně rovnice

$$xe^{u+v} + 2uv = 1$$
$$ye^{u-v} - \frac{u}{1+v} = 2x.$$

Spočtěte $u'(1,2)$ a $v'(1,2)$.
Řešení: Příklad i s řešením máme z: https://www.karlin.mff.cuni.cz/~pick/analyza.pdf

- Uvažujme $F : \mathbb{R}^{2+2} \to \mathbb{R}^2$, $F : (F_1, F_2)$, kde

$$F_1(x,y,u,v) = xe^{u+v} + 2uv - 1$$
$$F_2(x,y,u,v) = ye^{u-v} - \frac{u}{1+v} - 2x.$$

Pak $F \in \mathcal{C}^\infty\big(\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times(-1,\infty)\big)$.
Dále $F(1,2,0,0) = [0,0]$.
Sestavme matici:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial v} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xe^{u+v} + 2v & xe^{u+v} + 2u \\ ye^{u-v} - \frac{1}{1+v} & -ye^{u-v} + \frac{u}{(1+v)^2} \end{pmatrix}$$

V bodě $(1,2,0,0)$ dostáváme determinant

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -3 \neq 0.$$

Z věty o implicitních funkcích tedy existuje okolí U bodu $(1,2)$ a okolí V bodu $(0,0)$ takové, že pro každé $(x,y) \in U$ existuje právě jedno $(u,v) = \varphi(x,y) \in V$ splňující $F(x,y,u,v) = 0$. Označíme-li složky φ jako $u(x,y)$ a $v(x,y)$, dostáváme funkce třídy $\mathcal{C}^\infty$ na U.

- Zderivujme podle proměnné x rovnice :

$$xe^{u+v} + 2uv = 1$$
$$ye^{u-v} - \frac{u}{1+v} = 2x.$$

Dostáváme

$$e^{u+v} + xe^{u+v}(u_x + v_x) + 2u_x v + 2uv_x = 0$$
$$yu^{u-v}(u_x - v_x) - \frac{1}{(1+v)^2}(u_x(1+v) - uv_x) = 0$$

Dosadíme $x = 1$, $y = 2$, $u(1,2) = 0$, $v(1,2) = 0$. Máme

$$u_x + v_x = -1$$
$$u_x - 2v_x = 2$$

Odtud

$$u_x(1,2) = 0,$$
$$v_x(1,2) = -1.$$

- Zderivujme podle proměnné y rovnice :

$$xe^{u+v} + 2uv = 1$$
$$ye^{u-v} - \frac{u}{1+v} = 2x.$$

Dostáváme

$$xe^{u+v}(u_y + v_y) + 2u_y v + 2uv_y = 0$$
$$e^{u-v} + yu^{u-v}(u_y - v_y) - \frac{1}{(1+v)^2}(u_y(1+v) - uv_y) = 0$$

Dosadíme $x = 1$, $y = 2$, $u(1,2) = 0$, $v(1,2) = 0$. Máme

$$u_y + v_y = 0$$
$$u_y - 2v_y = -1$$

Odtud

$$u_y(1,2) = -\frac{1}{3},$$
$$v_y(1,2) = \frac{1}{3}.$$

- Tedy $u'(1,2) = (0, -\frac{1}{3})$, $v'(1,2) = (-1, \frac{1}{3})$.

3. Dokažte, že existují funkce $z(x,y)$ a $t(x,y)$, které jsou třídy C^∞ na nějakém okolí U obsahujícím $[1,-1]$ a splňují rovnice

$$x^2 + y^2 - \frac{1}{2}z^2 - t^3 = 0$$
$$x + y + z - t - 2 = 0,$$

spolu se vztahy $z(1,-1) = 2$ a $t(1,-1) = 0$.
Spočtěte $z''(1,-1)$.
Řešení: Příklad i s řešením máme z: https://www.karlin.mff.cuni.cz/~pick/analyza.pdf

- Uvažujme $F : \mathbb{R}^{2+2} \to \mathbb{R}^2$, $F : (F_1, F_2)$, kde

$$F_1(x, y, z, t) = x^2 + y^2 - \frac{1}{2}z^2 - t^3$$
$$F_2(x, y, z, t) = x + y + z - t - 2,$$

Pak $F \in \mathcal{C}^\infty\big(\mathbb{R}^4\big)$.
Dále $F(1, -1, 2, 0) = [0, 0]$.
Sestavme matici:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial z} & \frac{\partial F_1}{\partial t} \\ \frac{\partial F_2}{\partial z} & \frac{\partial F_2}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z & -3t^2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

V bodě $(1, -1, 2, 0)$ dostáváme determinant

$$\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

Z věty o implicitních funkcích tedy existuje okolí U bodu $(1, -1)$ a okolí V bodu $(2, 0)$ takové, že pro každé $(x, y) \in U$ existuje právě jedno $(z, t) = \varphi(x, y) \in V$ splňující $F(x, y, z, t) = 0$. Označíme-li složky φ jako $z(x, y)$ a $t(x, y)$, dostáváme funkce třídy $\mathcal{C}^\infty$ na U.

- Zderivujme podle proměnné x rovnice :

$$x^2 + y^2 - \frac{1}{2}z^2 - t^3 = 0$$
$$x + y + z - t - 2 = 0,$$

Dostáváme

$$2x - zz_x - 3t^2 t_x = 0$$
$$1 + z_x - t_x = 0$$

Dosadíme $x = 1$, $y = -1$, $z(1, -1) = 2$, $t(1, -1) = 0$. Máme

$$-2z_x = -2$$
$$z_x - t_x = -1$$

Odtud

$$z_x(1, -1) = 1,$$
$$t_x(1, -1) = 2.$$

- Zderivujme podle proměnné y rovnice :

$$x^2 + y^2 - \frac{1}{2}z^2 - t^3 = 0$$
$$x + y + z - t - 2 = 0,$$

Dostáváme

$$2y - zz_y - 3t^2 t_y = 0$$
$$1 + z_y - t_y = 0$$

Dosadíme $x = 1$, $y = -1$, $z(1,-1) = 2$, $t(1,-1) = 0$. Máme

$$\begin{aligned} -2z_y &= 2 \\ z_y - t_y &= -1 \end{aligned}$$

Odtud

$$\begin{aligned} z_x(1,-1) &= -1, \\ t_x(1,-1) &= 0. \end{aligned}$$

- Rovnice zderivujeme ještě jednou. Dostáváme

$$\begin{aligned} 2 - (z_x)^2 - zz_{xx} - 6t(t_x)^2 - 3t^2 t_{xx} &= 0, \\ z_{xx} - t_{xx} &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 - (z_y)^2 - zz_{yy} - 6t(t_y)^2 - 3t^2 t_{yy} &= 0, \\ z_{yy} - t_{yy} &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -z_y z_x - zz_{xy} - 6tt_y t_x - 3t^2 t_{xy} &= 0 \\ z_{xy} - t_{xy} &= 0, \end{aligned}$$

Dosadíme a získáme

$$\begin{aligned} z_{xx}(1,-1) &= \frac{1}{2} \\ z_{yy}(1,-1) &= \frac{1}{2} \\ z_{xy}(1,-1) &= \frac{1}{2} \\ t_{xx}(1,-1) &= \frac{1}{2} \\ t_{yy}(1,-1) &= \frac{1}{2} \\ t_{xy}(1,-1) &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

- Závěr:

$$z''(1,-1)(h_1,h_2) = \frac{1}{2}h_1^2 + h_1 h_2 + \frac{1}{2}h_2^2$$

4. Ukažte, že rovnice

$$\begin{aligned} x &= u + v^2 \\ y &= u^2 - v^3 \end{aligned}$$

definují na jistém okolí bodu $[3,3]$ funkce $u(x,y)$, $v(x,y)$ třídy C^∞, které splňují $u(3,3) = 2$, $v(3,3) = 1$. Spočtěte $z_{xy}(3,3)$, pokud $z = 2uv$.
Řešení: Příklad i s řešením máme z: https://www.karlin.mff.cuni.cz/~pick/analyza.pdf

- Uvažujme $F : \mathbb{R}^{2+2} \to \mathbb{R}^2$, $F : (F_1, F_2)$, kde

$$\begin{aligned} F_1(x,y,u,v) &= x = u + v^2 \\ F_2(x,y,u,v) &= y = u^2 - v^3 \end{aligned}$$

Pak $F \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^4)$.
Dále $F(3,3,2,1) = [0,0]$.
Sestavme matici:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial v} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2v \\ -2u & 3v^2 \end{pmatrix}$$

V bodě $(3,3,2,1)$ dostáváme determinant

$$\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} = -11 \neq 0.$$

Z věty o implicitních funkcích tedy existuje okolí U bodu $(3,3)$ a okolí V bodu $(2,1)$ takové, že pro každé $(x,y) \in U$ existuje právě jedno $(u,v) = \varphi(x,y) \in V$ splňující $F(x,y,u,v) = 0$. Označíme-li složky φ jako $u(x,y)$ a $v(x,y)$, dostáváme funkce třídy $\mathcal{C}^\infty$ na U.

- Platí

$$z_{xy} = 2(u_{xy}v + u_x v_y + u_y v_x + u v_{xy})$$

Odtud plyne, které derivace funkcí u a v potřebujeme dopočítat.

- Zderivujme podle proměnné x rovnice :

$$x = u + v^2$$
$$y = u^2 - v^3$$

Dostáváme

$$u_x + 2vv_x = 1$$
$$2uu_x - 3v^2 v_x = 0$$

- Zderivujme podle proměnné y:

$$u_y + 2vv_y = 0$$
$$2uu_y - 3v^2 v_y = 1$$

Dosadíme $x = 3$, $y = 3$, $u(3,3) = 2$, $v(3,3) = 1$. Máme
Odtud

$$u_x(3,3) = \frac{3}{11},$$
$$v_x(3,3) = \frac{4}{11},$$
$$u_y(3,3) = \frac{2}{11},$$
$$v_y(3,3) = \frac{-1}{11},$$

- Ještě jednou zderivujme:

$$u_{xy} + 2v_x v_y + 2vv_{yx} = 0$$
$$2u_x u_y + 2uu_{yx} - 6vv_x v_y - 3v^2 v_{yx} = 0$$

Po dosazení vyjde

$$u_{yx}(3,3) = \frac{224}{11^3},$$
$$v_{yx}(3,3) = -\frac{68}{11^3}.$$

- Ze záměnnosti parciálních derivací můžeme dosadit a získáme

$$z_{xy}(3,3) = \frac{26}{11}$$

5. Spočtěte x_v, y_v a z_v, pokud

$$u = x^2 + y^2,$$
$$v = x^2 - 2xy^2,$$
$$z = \ln(y^2 - x^2)$$

v bodě $u = 5$, $v = -7$, $x(5,-7) = 1$ a $y(5,-7) = 2$.
(Rada: Prve řešte první dvě rovnice pomocí Věty o implicitních funkcích, z_v pak vyjádřete řetízkovým pravidlem.)
Řešení: Příklad i s řešením máme z: https://www.karlin.mff.cuni.cz/~bouchala/Vyuka/

- Budeme prve pracovat jen s prvními dvěma rovnicemi.
Uvažujme $F : \mathbb{R}^{2+2} \to \mathbb{R}^2$, $F : (F_1, F_2)$, kde

$$F_1(x,y,u,v) = u - x^2 - y^2,$$
$$F_2(x,y,u,v) = v - x^2 + 2xy^2,$$

Pak $F \in \mathcal{C}^\infty\left(\mathbb{R}^4\right)$.
Dále $F(1,2,5,-7) = [0,0]$.
Sestavme matici (pozor, derivujeme podle x a y):

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x & -2y \\ -2x + 2y^2 & 4xy \end{pmatrix}$$

V bodě $(1,2,5,-7)$ dostáváme determinant

$$\begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = 8 \neq 0.$$

Z věty o implicitních funkcích tedy existuje okolí U bodu $(5,-7)$ a okolí V bodu $(1,2)$ takové, že pro každé $(u,v) \in U$ existuje právě jedno $(x,y) = \varphi(u,v) \in V$ splňující $F(x,y,u,v) = 0$. Označíme-li složky φ jako $x(u,v)$ a $y(u,v)$, dostáváme funkce třídy $\mathcal{C}^\infty$ na U.

- Zderivujme podle proměnné v rovnice :

$$u = x^2 + y^2,$$
$$v = x^2 - 2xy^2,$$

Dostáváme

$$\begin{aligned} 2xx_v + 2yy_v &= 0 \\ 2xx_v - 2x_v y^2 - 4xyy_v &= 1 \end{aligned}$$

Dosadíme $u = 5$, $v = -7$, $x(5, -7) = 1$, $y(5, -7) = 2$. Máme

$$\begin{aligned} 2x_v + 4y_v &= 0 \\ -6x_v - 8y_v &= 1 \end{aligned}$$

Odtud

$$\begin{aligned} x_v(5, -7) &= -\frac{1}{2} \\ y_v(5, -7) &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

- Derivaci funkce z získáme z řetízkového pravidla (protože funkce y a x jsou $\mathcal{C}^\infty$, tak jsou splněny podmínky řetízkového pravidla). Máme

$$z = \ln(y^2 - x^2)$$

Tedy

$$z_v = \frac{-2x}{y^2 - x^2} x_v + \frac{2y}{y^2 - x^2} y_v$$

Po dosazení

$$z_v(5, -7) = \frac{2}{3}$$

Zkouškové příklady

6. Ukažte, že vztahy

$$\begin{aligned} u &= \ln(xy) + \cos v \\ v &= e^{x-u} - y^2 - v \end{aligned}$$

definují na jistém okolí bodu $[x, y, u, v] = [1, 1, 1, 0]$ hladké funkce x, y proměnných u, v takové, že $x(1, 0) = 1$ a $y(1, 0) = 1$. Rozhodněte, zda existuje totální diferenciál funkce $y(u, v)$ v bodě $[1, 0]$ a pokud ano, nalezněte jej.

Řešení:

- Uvažujme $F : \mathbb{R}^{2+2} \to \mathbb{R}^2$, $F : (F_1, F_2)$, kde

$$\begin{aligned} F_1(x, y, u, v) &= \ln(xy) + \cos v - u \\ F_2(x, y, u, v) &= e^{x-u} - y^2 - 2v \end{aligned}$$

Pak $F \in \mathcal{C}^\infty\big((0, \infty) \times (0, \infty) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}\big)$.
Dále $F(1, 1, 1, 0) = [0, 0]$.
Sestavme matici (pozor, derivujeme podle x a y):

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & \frac{1}{y} \\ e^{x-u} & -2y \end{pmatrix}$$

V bodě $(1,1,1,0)$ dostáváme determinant

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

Z věty o implicitních funkcích tedy existuje okolí U bodu $(1,0)$ a okolí V bodu $(1,1)$ takové, že pro každé $(u,v) \in U$ existuje právě jedno $(x,y) = \varphi(u,v) \in V$ splňující $F(x,y,u,v) = 0$. Označíme-li složky φ jako $x(u,v)$ a $y(u,v)$, dostáváme funkce třídy $\mathcal{C}^\infty$ na U.

- Zderivujme podle proměnné v rovnice :

$$\begin{aligned} u &= \ln(xy) + \cos v \\ v &= e^{x-u} - y^2 - v \end{aligned}$$

Dostáváme

$$\begin{aligned} \frac{1}{xy}(x_v y + y_v x) - \sin v = 0 \\ e^{x-u}(x_v - 0) - 2yy_v - 1 = 1 \end{aligned}$$

Dosadíme $u = 1$, $v = 0$, $x(1,0) = 1$, $y(1,0) = 1$. Máme

$$\begin{aligned} x_v + y_v &= 0 \\ x_v - 2y_v - 1 &= 1 \end{aligned}$$

Odtud

$$\begin{aligned} x_v(1,1) &= \frac{2}{3} \\ y_v(1,1) &= -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

- Zderivujme podle proměnné u rovnice :

$$\begin{aligned} u &= \ln(xy) + \cos v \\ v &= e^{x-u} - y^2 - v \end{aligned}$$

Dostáváme

$$\begin{aligned} \frac{1}{xy}(x_u y + y_u x) = 1 \\ e^{x-u}(x_u - 1) - 2yy_u = 0 \end{aligned}$$

Dosadíme $u = 1$, $v = 0$, $x(1,0) = 1$, $y(1,0) = 1$. Máme

$$\begin{aligned} x_u + y_u &= 1 \\ x_u - 1 - 2y_u &= 0 \end{aligned}$$

Odtud

$$\begin{aligned} x_u(1,1) &= 1 \\ y_u(1,1) &= 0 \end{aligned}$$

- Z věty o implicitních funkcích máme, že $y(u,v)$ je třídy C^∞ - tedy má spojité 1. parciální derivace a tedy má totální diferenciál tvaru:

$$y'(1,1)(h_1, h_2) = 0 \cdot h_1 - \frac{2}{3} h_2.$$

7. Ukažte, že vztahy

$$u = \ln(x^2 + y^2) - 2xy$$
$$v = e^x \sin y + \frac{1}{x^2}$$

definují na jistém okolí bodu $[x, y, u, v] = [1, 0, 0, 1]$ hladké funkce x, y proměnných u, v takové, že $x(0, 1) = 1$ a $y(0, 1) = 0$. Nechť navíc je z funkce proměnných x a y definovaná na okolí bodu $[x, y] = [1, 0]$ předpisem $z(x, y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ a nechť Φ je funkce proměnných u a v definovaná na okolí bodu $[u, v] = [0, 1]$ předpisem $\Phi(u, v) = z(x(u, v), y(u, v))$. Spočtěte $\frac{\partial \Phi}{\partial u}(0, 1)$.

Řešení:

- Uvažujme $F : \mathbb{R}^{2+2} \to \mathbb{R}^2$, $F : (F_1, F_2)$, kde

$$F_1(x, y, u, v) = \ln(x^2 + y^2) - 2xy - u$$
$$F_2(x, y, u, v) = e^x \sin y + \frac{1}{x^2} - v$$

  Pak $F \in \mathcal{C}^\infty(B_{\frac{1}{2}}(1, 0, 0, 1))$.
  Dále $F(1, 0, 0, 1) = [0, 0]$.
  Sestavme matici (pozor, derivujeme podle x a y):

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2x}{x^2+y^2} - 2y & \frac{2y}{x^2+y^2} - 2x \\ e^x \sin y - \frac{2}{x^3} & e^x \cos y \end{pmatrix}$$

  V bodě $(1, 0, 0, 1)$ dostáváme determinant

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & e \end{vmatrix} = 2e + 4 \neq 0.$$

  Z věty o implicitních funkcích tedy existuje okolí U bodu $(0, 1)$ a okolí V bodu $(1, 0)$ takové, že pro každé $(u, v) \in U$ existuje právě jedno $(x, y) = \varphi(u, v) \in V$ splňující $F(x, y, u, v) = 0$. Označíme-li složky φ jako $x(u, v)$ a $y(u, v)$, dostáváme funkce třídy $\mathcal{C}^\infty$ na U.

- Zderivujme podle proměnné u rovnice :

$$u = \ln(xy) + \cos v$$
$$v = e^{x-u} - y^2 - v$$

  Dostáváme

$$\frac{1}{x^2 + y^2}(2xx_u + 2yy_u) - 2x_u y - 2xy_u = 1$$
$$e^x x_u \sin y + e^x \cos y y_u + \frac{-2}{x^3} x_u = 0$$

  Dosadíme $u = 0$, $v = 1$, $x(0, 1) = 1$, $y(0, 1) = 0$. Máme

$$2x_u - 2y_u = 1$$
$$ey_u - 2x_u = 0$$

Odtud

$$x_u(0,1) = \frac{e}{2e-4}$$
$$y_u(0,1) = \frac{1}{e-2}$$

- Derivaci funkce Φ dopočteme z řetízkového pravidla (protože funkce x a y jsou $\mathcal{C}^\infty$, tak jsou splněny podmínky řetízkového pravidla).

$$\Phi_u = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} y \cdot \frac{-1}{x^2} x_u + \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{1}{x} y_u$$

Po dosazení máme

$$\Phi_u(0,1) = \frac{1}{e-2}$$

Teorie

8. Nechť $T : (C([0,1]), \rho_{\sup}) \to \mathbb{R}$ je zobrazení definované jako $T(f) = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$. Ukažte, že T je spojité.
Řešení: Zvolme funkci $f_0 \in C([0,1])$. Zobrazení T je pak spojité v bodě f_0, jestliže

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall f \in C([0,1]),\ \rho_{\sup}(f, f_0) < \delta : |T(f) - T(f_0)| < \varepsilon,$$

kde

$$|T(f) - T(f_0)| = \left| \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^1 f_0(x)\,\mathrm{d}x \right| = \left| \int_0^1 (f(x) - f_0(x))\,\mathrm{d}x \right|$$

Zvolme $\varepsilon > 0$ a $\delta = \frac{1}{2}\varepsilon$. Zvolme f takovou, že $\sup_{x\in[0,1]} |f(x) - f_0(x)| < \delta$.
Pak máme

$$|T(f) - T(f_0)| = \left| \int_0^1 (f(x) - f_0(x))\,\mathrm{d}x \right| \le \int_0^1 |f(x) - f_0(x)|\,\mathrm{d}x \le \int_0^1 \delta\,\mathrm{d}x = \delta < \varepsilon.$$

Tedy T je spojité v f_0.