9. cvičení – Implicitní funkce

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Teorie

Věta 1. Nechť $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ je otevřená množina, $F : G \to \mathbb{R}$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, $\bar{y} \in \mathbb{R}$, $[\bar{x}, \bar{y}] \in G$ a nechť platí:

1. $F \in \mathcal{C}^k(G)$
2. $F(\bar{x}, \bar{y}) = 0$
3. $\frac{\partial F}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y}) \neq 0.$

Pak existuje okolí $U \subset \mathbb{R}^n$ bodu $\bar{x}$ a okolí $V \subset \mathbb{R}$ bodu $\bar{y}$ tak, že $U \times V \subset G$ a pro každé $x \in U$ existuje právě jedno $y \in V$ s vlastností $F(x, y) = 0$. Píšeme-li $y = \varphi(x)$, pak $\varphi \in \mathcal{C}^k(U)$ a

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_j}(x, \varphi(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, \varphi(x))}$$

kde $j \in \{1, \dots, n\}$, $x \in U$.

Příklady

1. Ukažte, že rovnice $(x^2 + y^2)^2 - 3x^2y - y^3 = 0$ určuje na okolí bodu $[0, 1]$ implicitně zadanou funkci $y(x)$. Spočtěte první a druhou derivaci této funkce v bodě 0.
2. Ukažte, že rovnice $x^2 + xy^2 - y^2 = 1$ určuje na okolí bodu $[-2, 1]$ implicitně zadanou funkci $y(x)$. Spočtěte první derivaci této funkce v bodě -2.
3. Ukažte, že rovnice $x^2 + y^2 + xy - 3 = 0$ určuje na okolí bodu $[1, 1]$ implicitně zadanou funkci $y(x)$. Spočtěte první a druhou derivaci této funkce v bodě 1.
4. Ukažte, že rovnice $y - \frac{1}{2}\sin y = x$ určuje na okolí bodu $[\pi, \pi]$ implicitně zadanou funkci $y(x)$. Najděte rovnici tečny v bodě $[\pi, \pi]$.
5. Ukažte, že rovnice $y - \frac{1}{2}\sin y = x$ určuje na okolí bodu $[\frac{\pi-1}{2}, \frac{\pi}{2}]$ implicitně zadanou funkci $y(x)$. Určete, zda graf této funkce leží na okolí daného bodu pod tečnou nebo nad tečnou.
6. K rovnici $-x^2 + y^2 - 2xy + y = 0$ najděte body, v nichž jsou splněny předpoklady věty o implicitní funkci a které jsou stacionárními body takto implicitně definovaných funkcí jedné proměnné. Rozhodněte, zda jsou v těchto bodech lok. extrémy.
7. Ukažte, že rovnice $\ln(x^2z^3) = e^{z\cos y} - 1$ určuje na okolí bodu $[-1, \frac{\pi}{2}, 1]$ implicitně zadanou funkci $z(x, y)$. Vypočtěte její parciální derivace 1. řádu a určete jejich hodnotu v daném bodě.
8. Ukažte, že rovnice $z + e^z = xy + 2$ určuje na okolí bodu $[-1, 1, 0]$ implicitně zadanou funkci $z(x, y)$. Vypočtěte její parciální derivace 1. a 2. řádu v daném bodě.
9. Ukažte, že rovnice $x^2 + y^2 + z^2 + xyz = 20$ určuje na okolí bodu $[1, 2, 3]$ implicitně zadanou funkci $z(x, y)$. Najděte rovnici tečné roviny v daném bodě.

Zkouškové příklady

10. Ukažte, že daná rovnice určeuje na okolí bodu $[\bar{x}, \bar{y}]$ implicitně zadanou funkci (proměnné x). Spočtěte první a druhou derivaci této funkce v bodě $\bar{x}$.
    (a) $x^y + y^x = 2y, [\bar{x}, \bar{y}] = [1, 1]$
    (b) $e^{\sin x^2} + e^{\sin xy} = 2y + 2, [\bar{x}, \bar{y}] = [0, 0]$
    (c) $\pi/2 + \arcsin(x + y^2) = \arccos(y + x^2), [\bar{x}, \bar{y}] = [0, 0]$
    (d) $\arctan(y^2 + xy) = e^{xy} - \cos x + y, [\bar{x}, \bar{y}] = [0, 0]$

Teorie

11. Rozhodněte, zda je podmínka $\frac{\partial F}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y}) \neq 0$ ve větě o implicitní funkci nutná. Dokážete sestrojit funkci (alespoň obrázkem), u níž platí všechny předpoklady až na tento, a přesto platí závěr?
12. Sestrojte funkci $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, která je parciálně spojitá, ale není spojitá.
    Řekneme, že f je parciálně spojitá, pokud pro každé $x_0 \in \mathbb{R}$ je funkce $g(y) = f(x_0, y)$ spojitá na $\mathbb{R}$ (jakožto funkce 1 proměnné), a pro každé $y_0 \in \mathbb{R}$ je funkce $h(x) = f(x, y_0)$ spojitá na $\mathbb{R}$.
13. Sestrojte funkci $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, která má v bodě $[0, 0]$ derivaci ve všech směrech $D_v f(0, 0)$, ale není v bodě $[0, 0]$ spojitá.
14. Sestrojte funkci $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, která má v bodě $[0, 0]$ derivaci ve všech směrech $D_v f(0, 0)$, ale neexistuje totální diferenciál $Df([0, 0])$.

(12) $\frac{xy}{x^2+y^2}$, $f(0,0) = 0$
(13) $\frac{xy^2}{x^2+y^4}$, $f(0,0) = 0$
(14) jako (13) nebo $f(0,0) = 0$, $f(x,x^2) = 1$, jinak 0