8. cvičení – Řetízkové pravidlo

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Teorie

Věta 1 (Řetízkové pravidlo)**.** Nechť $G \subset \mathbb{R}^s$ a $H \subset \mathbb{R}^r$ jsou otevřené množiny. Nechť funkce $\varphi_1, \dots, \varphi_r \in C^1(G)$ a $f \in C^1(H)$.

Definujme funkci $F : G \to \mathbb{R}$, $F(x) = f(\varphi_1(x), \dots, \varphi_r(x))$. Pak $F \in C^1(G)$.

Pro $a \in G$ označme $b = [\varphi_1(a), \dots, \varphi_r(a)]$. Pak pro $j = 1, \dots, s$ platí

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}(a) = \sum_{i=1}^{r} \frac{\partial f}{\partial y_i}(b) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(a).$$

Poznámka 2 (Konkrétně)**.** Je-li funkce $f(x, y, z)$ spojitě diferencovatelná a $x = \phi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$, $z = \chi(u, v)$, kde ϕ, ψ, χ jsou spojitě diferencovatelné funkce, pak

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}$$

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}$$

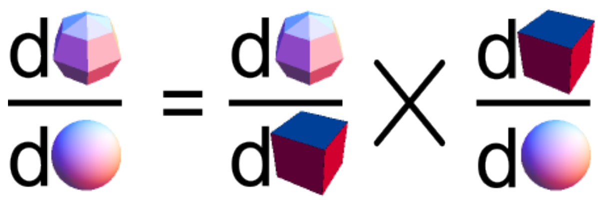

Figure 1: http://mathinsight.org/media/image/image/chain_rule_geometric_objects.png

Věta 3 (Postačující podmínka pro existenci totálního diferenciálu)**.** Nechť $a \in \mathbb{R}^n$, f je reálná funkce n proměnných definovaná na nějakém okolí a. Nechť navíc $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ jsou spojité v a. Pak existuje $f'(a)$.

Věta 4 (Derivace ve směru)**.** Nechť $a \in \mathbb{R}^n$, f je reálná funkce n proměnných a existuje $f'(a)$. Pak pro každé $v \in \mathbb{R}^n$ platí

$$D_v f(a) = f'(a)(v).$$

Věta 5 (Derivace složeného zobrazení)**.** Nechť $n, k, m \in \mathbb{N}$, $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ a $G : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ jsou zobrazení. Nechť $a \in \mathbb{R}^n$, $b = F(a)$ a nechť existují $F'(a)$ a $G'(b)$. Pak existuje $(G \circ F)'(a)$ a platí

$$(G \circ F)'(a) = G'(b) \circ F'(a)$$

($(G \circ F)'(a)$ je reprezentovánou součinem matic, které reprezentují zobrazení $G'(b)$ a $F'(a)$.)

Notation 6. Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je funkce, nechť $i, j \in \{1, \dots, n\}$ a $a \in \mathbb{R}^n$. Parciální derivaci funkce $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ podle j-té proměnné v bodě a značíme

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right), i \neq j, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right), i = j,$$

Věta 7. O zaměnitelnosti parciálních derivací

Nechť f je reálná funkce n proměnných, $a \in \mathbb{R}^n$ a $1 \leq i, j \leq n$. Nechť platí, že

(i) funkce $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ je spojitá v bodě a,

(ii) funkce $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ je definovaná na nějakém okolí bodu a.

Potom existují a jsou si rovny

$$\frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_j \partial x_i}.$$

Příklady

Předpokládejme, že jsou splněny všechny nutné předpoklady (speciálně funkce jsou diferencovatelné a mají záměnné smíšené derivace).

1. Vypočtěte derivace složených funkcí
   (a) $z = u\sqrt{1+v^2}$, kde $u = e^{2x}$ a $v = e^{-x}$
   (b) $z = uv^2w^3$, kde $u = \sin x$, $v = -\cos x$ a $w = e^x$
   (c) $z = \sin u \cos v$, kde $u = (x-y)^2$ a $v = x^2 - y^2$
   (d) $w = yz^2 - x^3$, kde $x = e^{r-t}$, $y = \ln(r + 2s + 3t)$ a $z = \sqrt{rs + t}$

2.✿ Spočtěte parciální derivace $g(x, y) = f(x^2 + y^2)$.

3. Nechť $f(x, y) = x^2 + 3y^2$. Určete derivace f vzhledem k polárním souřadnicím.
   Polární souřadnice: $x = r\cos\alpha$, $y = r\sin\alpha$.

4. Nechť $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$. Určete derivace f vzhledem k polárním souřadnicím.

5.♡ Ukažte, že funkce $F(x, y, z) = \frac{xy}{z}\ln x + xf\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)$ vyhovuje vztahu $x\frac{\partial F}{\partial x} + y\frac{\partial F}{\partial y} + z\frac{\partial F}{\partial z} = F + \frac{xy}{z}$.

6.❄ Nechť $g(x, y) = f(x + y, x - y)$, spočtěte $\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}$ v bodě (a, b).

7. Ukažte, že funkce $F(x, y) = xf(x+y) + yg(x+y)$ vyhovuje rovnici $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0$.

8. Výraz $x\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ přetransformujte pro funkci $F(u, v) = f(x, y)$, kde $u = y$ a $v = y/x$.

Zkouškové příklady

9.☆ Nechť $F = (F_1, F_2) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ je zobrazení definované předpisem

$$F(x, y, z) = ((x+1)^2(y+1)(z+2), \sin x \cos(2y + z)).$$

Zobrazení $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ má v bodě $[2, 0]$ derivaci representovanou maticí

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   (a) Dokažte, že v bodě $[0, 0, 0]$ existuje derivace zobrazení $G \circ F$ a spočtěte její representující matici.

(b) Spočtěte derivaci funkce F_1 v bodě $[0,0,0]$ podle vektoru $(1,2,0)$.

10. Nechť $F = (F_1, F_2, F_3, F_4) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ je zobrazení definované předpisem

$$F(x,y) = \left(\arctan(x+2y), x+y, (x^2+y^2)\frac{|x|}{1+|y|}, ye^x\right).$$

(a) Ukažte, že v bodě $(-1,1)$ existuje derivace funkce F a spočtěte její reprezentující matici.

(b) Spočtěte $\frac{\partial F_3}{\partial x}(0,0)$, pokud existuje.

(2) Uvažujme funkci $f(u)$, kde $u(x,y) = x^2 + y^2$.
(5) Uvažujme funkci $f(u,v)$, kde $u(x,y,z) = \frac{y}{x}$ a $v(x,yz) = \frac{z}{x}$.
(6) 2. derivace se budou počítat lépe, když si označíme funkce $h(u,v) = \frac{\partial f}{\partial u}$ a $j(u,v) = \frac{\partial f}{\partial v}$.
(9) Nezapomeňte odůvodňovat, proč všechny příslušné derivace existují.