6. cvičení – Parciální derivace

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Příklady

1. Najděte parciální derivace 1. řádu podle všech proměnných, určete D_f a $D_{f'}$.

   (a) $f(x,y) = 35x - 4y^2 + 3x2y$
   Řešení:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 35 + 6y$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 6x - 8y$$
$$D_f = D_{\frac{\partial f}{\partial x}} = D_{\frac{\partial f}{\partial y}} = \mathbb{R}^2$$

   (b) $f(x,y) = \dfrac{\sin y^2}{x}$
   Řešení:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-\sin y^2}{x^2}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y\cos y^2}{x}$$
$$D_f = D_{\frac{\partial f}{\partial x}} = D_{\frac{\partial f}{\partial y}} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$$

   (c) $f(x,y) = xy\,\tan\left(\dfrac{x}{y}\right)$
   Řešení:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y\tan\frac{x}{y} + \frac{x}{\cos^2\frac{x}{y}}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = x\tan\frac{x}{y} + \frac{-x^2}{y\cos^2\frac{x}{y}}$$
$$D_f = D_{\frac{\partial f}{\partial x}} = D_{\frac{\partial f}{\partial y}} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0, \frac{x}{y} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

   (d) $f(x,y) = x^y$
   Řešení:

$$x^y = e^{y\ln x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = yx^{y-1}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^y\ln x$$
$$D_f = D_{\frac{\partial f}{\partial x}} = D_{\frac{\partial f}{\partial y}} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$$

(e) $f(x,y) = xe^{xy}$

Řešení:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{xy} + xye^{xy}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 e^{xy}$$

$$D_f = D_{\frac{\partial f}{\partial x}} = D_{\frac{\partial f}{\partial y}} = \mathbb{R}^2$$

(f) $f(x,y) = \arcsin \dfrac{y}{x}$

Řešení:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{y^2}{x^2}}} \cdot \frac{-y}{x^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{y^2}{x^2}}} \cdot \frac{1}{x}$$

$$D_f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0, \left|\frac{y}{x}\right| \leq 1\right\}$$

$$D_{\frac{\partial f}{\partial x}} = D_{\frac{\partial f}{\partial y}} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0, \left|\frac{y}{x}\right| < 1\right\}$$

(g) $f(x,y) = (x+y)^x$

Řešení:

$$(x+y)^x = e^{x \ln(x+y)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (x+y)^x \left(\ln(x+y) + \frac{x}{x+y}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x(x+y)^{x-1}$$

$$D_f = D_{\frac{\partial f}{\partial x}} = D_{\frac{\partial f}{\partial y}} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y > 0\}$$

(h) $f(x,y) = 3\sqrt[5]{xy^2}$

Řešení:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{3y^2}{5\sqrt[5]{(xy^2)^4}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{6xy}{5\sqrt[5]{(xy^2)^4}}$$

$$D_f = \mathbb{R}^2$$

$$D_{\frac{\partial f}{\partial x}} = D_{\frac{\partial f}{\partial y}} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy^2 \neq 0\}$$

(i) $f(x,y) = \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{x+y}{x-y}$

Řešení:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-y}{x^2 - y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{x^2 - y^2}$$

$$D_f = D_{\frac{\partial f}{\partial x}} = D_{\frac{\partial f}{\partial y}} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x+y}{x-y} > 0, x \neq y \right\}$$

(j) $f(x, y) = \operatorname{arccot} \dfrac{x+y}{x-y}$

Řešení:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-x}{x^2 + y^2}$$

$$D_f = D_{\frac{\partial f}{\partial x}} = D_{\frac{\partial f}{\partial y}} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq y\}$$

Příklady - zkouškové

Zdroj: https://www.karlin.mff.cuni.cz/~zeleny/vyuka.php

2. Najděte parciální derivace 1. řádu podle všech proměnných, určete D_f a $D_{f'}$, napište rovnici tečny v bodě a

   (a) $f(x, y) = |x^2 - y^2|$, $a = [1, 2]$

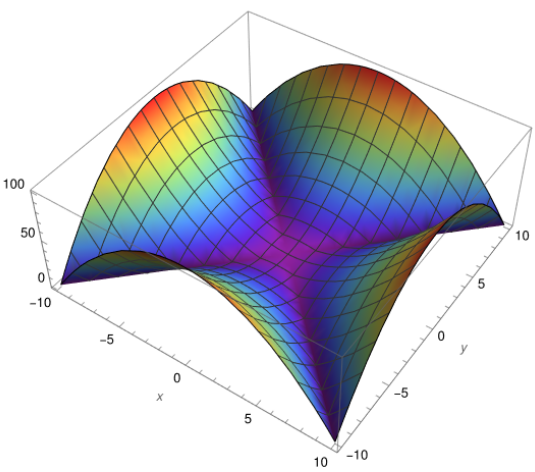
   Řešení:

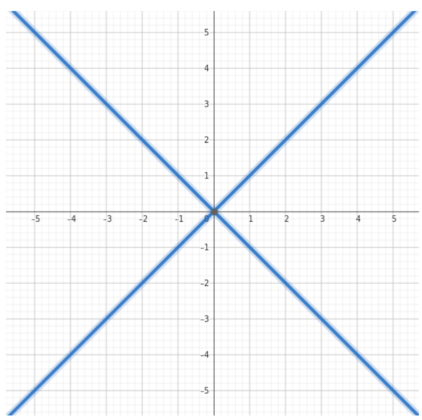
   - Definiční obor:

   $$D_f = \mathbb{R}^2$$

   - Pro $x^2 \neq y^2$ máme

   $$\frac{\partial f}{\partial x} = \operatorname{sgn}(x^2 - y^2) 2x$$
   $$\frac{\partial f}{\partial y} = \operatorname{sgn}(x^2 - y^2) 2y$$





- Pro $x^2 = y^2$ máme

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \lim_{t\to 0}\frac{f(x+t,y)-f(x,y)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{|(x+t)^2-y^2|-|x^2-y^2|}{t}\\ &= \lim_{t\to 0}\frac{|x^2+2xt+t^2-y^2|-|0|}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{|2xt+t^2|}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{|t|}{t}|2x+t|\end{aligned}$$

Spočteme limity zprava a zleva

$$\lim_{t\to 0+}\frac{|t|}{t}|2x+t| = \lim_{t\to 0+}|2x+t| = |2x|$$

$$\lim_{t\to 0-}\frac{|t|}{t}|2x+t| = \lim_{t\to 0+}-|2x+t| = -|2x|$$

Limita existuje jen pro $x = y = 0$ Tedy

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{cases} 0, & x = y = 0,\\ \nexists, & \text{jinak.}\end{cases}$$

- Protože funkce f je symetrická ($f(x,y) = f(y,x)$), parciální derivace podle y vyjdou analogicky, tedy

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \begin{cases} 0, & x = y = 0,\\ \nexists, & \text{jinak.}\end{cases}$$

- Závěr:
  i. Pro $x^2 \neq y^2$ máme

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \operatorname{sgn}(x^2-y^2)2x\\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \operatorname{sgn}(x^2-y^2)2y\end{aligned}$$

  ii. Pro $(0,0)$ máme

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

  iii. Pro $x^2 = y^2$, $x \neq 0 \neq y$, parciální derivace neexistují.

- Rovnice tečné roviny: Parciální dervivace funkce f jsou v bodě a spojité. Tedy v bodě a existuje totální diferenciál a tedy i tečná rovina. V bodě a máme

$$\begin{aligned}f(a) &= 3\\ \frac{\partial f}{\partial x}(a) &= -2\\ \frac{\partial f}{\partial y}(a) &= 4\end{aligned}$$

  Tedy tečná rovina má rovnici

$$z - 3 = -2(x-1) + 4(y-2).$$

(b) $f(x,y) = e^{x^2-y} + 7y + |xy|$, $a = [1,2]$

Řešení:

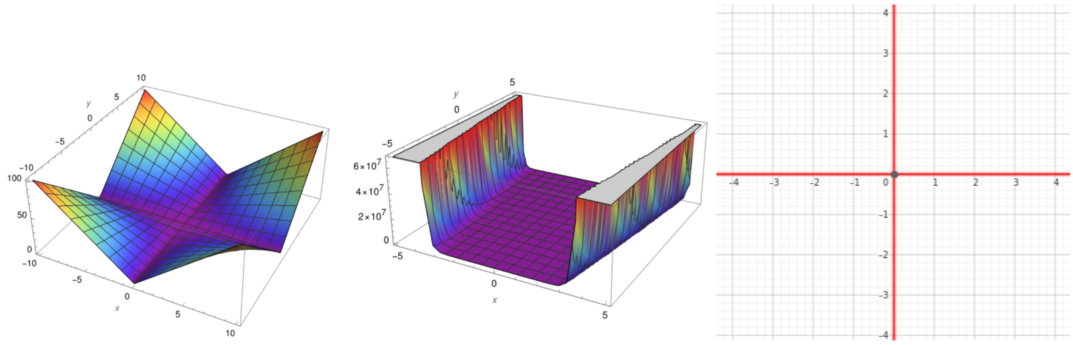
- Definiční obor:

$$D_f = \mathbb{R}^2$$

- Pro $xy \neq 0$ máme

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{x^2-y} 2x + \operatorname{sgn}(xy) y$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = -e^{x^2-y} + 7 + \operatorname{sgn}(xy) x$$

Graf funkce g, funkce f, problematické body derivace



- Pro $xy = 0$ (tedy na osách souřadnic) budeme vyšetřovat parciální derivace pro funkci $g = |xy|$.

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \lim_{t\to 0} \frac{g(x+t,y) - g(x,y)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{|(x+t)y| - |xy|}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{|xy+ty|}{t}$$
$$= \lim_{t\to 0} \frac{|ty|}{t}$$

Spočteme limity zprava a zleva

$$\lim_{t\to 0+} \frac{|t|}{t}|y| = |y|$$

$$\lim_{t\to 0-} \frac{|t|}{t}|y| = -|y|$$

Limita existuje jen pro $y = 0$ Tedy

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \begin{cases} 0, & y = 0, \\ \nexists, & \text{jinak.} \end{cases}$$

- Analogicky

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \lim_{t\to 0} \frac{g(x,y+t) - g(x,y)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{|x(y+t)| - |xy|}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{|xt|}{t}$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ \nexists, & \text{jinak.} \end{cases}$$

- Závěr: Původní funkci f lze zapsat jako

$$f = e^{x^2-y} + 7y + g.$$

Protože $e^{x^2-y}+7 \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, tak platí, že funkce f má parciální derivace právě tehdy, když je má funkce g.
Tedy:

i. Pro $xy \neq 0$ máme

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{x^2-y}2x + \operatorname{sgn}(xy)y$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = -e^{x^2-y} + 7 + \operatorname{sgn}(xy)x$$

ii. Pro $(x, 0)$, $x \neq 0$ máme

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{x^2-y}2x + 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \nexists$$

iii. Pro $(0, y)$, $y \neq 0$ máme

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \nexists$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = -e^{x^2-y} + 7 + 0$$

iv. Pro $(0, 0)$ máme

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{x^2-y}2x + 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = -e^{x^2-y} + 7 + 0$$

- Rovnice tečné roviny: Parciální dervivace funkce f jsou v bodě a spojité. Tedy v bodě a existuje totální diferenciál a tedy i tečná rovina. V bodě a máme

$$f(a) = \frac{1}{e} + 16$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = \frac{2}{e} + 2$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(a) = 8 - \frac{1}{e}$$

Tedy tečná rovina má rovnici

$$z - \frac{1}{e} - 16 = \left(\frac{2}{e} + 2\right)(x-1) + \left(8 - \frac{1}{e}\right)(y-2)$$

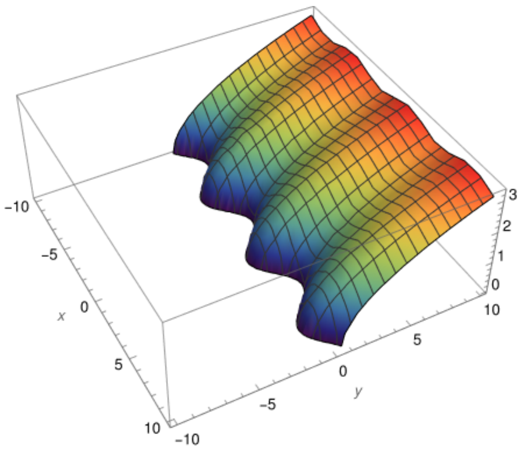
(c) $f(x, y) = \sqrt{y + \sin x}$, $a = [0, 1]$
Řešení:

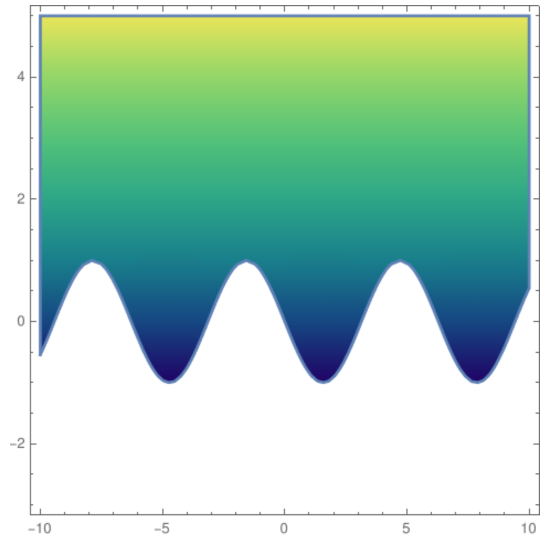
- Definiční obor:

$$D_f = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : y + \sin x \geq 0\}$$

- Pro x, y, kde $y > -\sin x$ máme

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\cos x}{\sqrt{y + \sin x}}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{y + \sin x}}$$





- Pro $y = -\sin x$ parciální derivace podle y neexistuje (nelze najít okolí pro definici limity).
  Parciální derivaci podle x lze derivaci počítat pouze v bodech $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, $y = 1$. (Jinde opět nelze najít okolí.)
  V těchto bodech máme

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + t, y) - f(x, y)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{\sqrt{y + \sin(x + t)} - \sqrt{y + \sin x}}{t}$$
$$= \lim_{t \to 0} \frac{\sqrt{1 + \sin(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi + t)} - 0}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{\sqrt{1 - \cos t}}{t}$$

  Spočteme limity zprava a zleva

$$\lim_{t \to 0+} \frac{\sqrt{1 - \cos t}}{t} = \lim_{t \to 0+} \sqrt{\frac{1 - \cos t}{t^2}} = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$\lim_{t \to 0-} \frac{\sqrt{1 - \cos t}}{t} = \lim_{t \to 0-} \frac{\sqrt{1 - \cos t}}{-|t|} = \lim_{t \to 0-} -\sqrt{\frac{1 - \cos t}{t^2}} = -\sqrt{\frac{1}{2}}$$

  Limita tedy neexistuje.
- Závěr:
  i. Pro $y > -\sin x$ máme

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\cos x}{\sqrt{y + \sin x}}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{y + \sin x}}$$

ii. Pro $y = -\sin x$ parciální derivace neexistují.

- Rovnice tečné roviny: Parciální dervivace funkce f jsou v bodě a spojité. Tedy v bodě a existuje totální diferenciál a tedy i tečná rovina. V bodě a máme

$$f(a) = 1$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = \frac{1}{2}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(a) = \frac{1}{2}$$

Tedy tečná rovina má rovnici

$$z - 1 = \frac{1}{2}(x - 0) + \frac{1}{2}(y - 1)$$

(d) $f(x,y) = \min\{x^2 + y^2; 2 - x^2 - y^2\}$, $a = [1,2]$

Řešení:

- Definiční obor:

$$D_f = \mathbb{R}^2$$

Navíc

$$f = \begin{cases} x^2 + y^2, & x^2 + y^2 \leq 1, \\ 2 - x^2 - y^2, & x^2 + y^2 > 1. \end{cases}$$

- Pro $x^2 + y^2 < 1$ máme

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$$

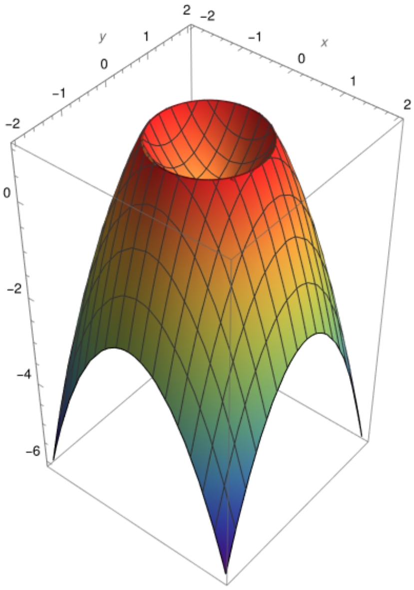
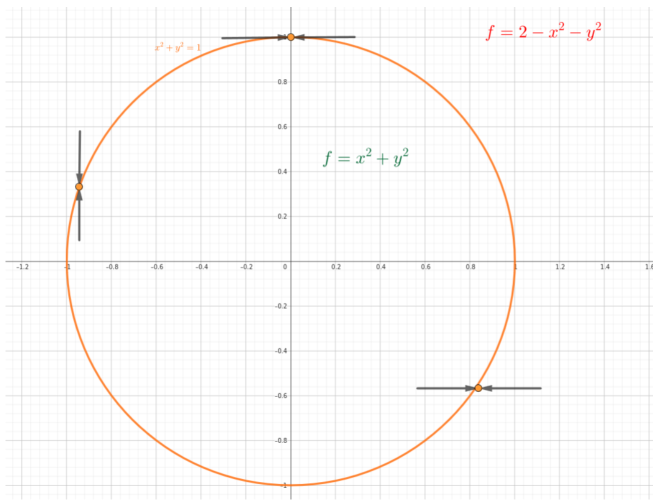
- Pro $x^2 + y^2 > 1$ máme

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2x$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2y$$

- Pro $x^2 + y^2 = 1$ vyšetříme parciální derivace z definice. Uvažujme body, kde $x > 0$. Počítejme zvlášť limity zleva a zprava.

$$\begin{aligned} \lim_{t \to 0+} \frac{f(x+t,y) - f(x,y)}{t} &= \lim_{t \to 0+} \frac{2 - (x+t)^2 - y^2 - (x^2 + y^2)}{t} \\ &= \lim_{t \to 0+} \frac{2 - x^2 - 2xt - t^2 - y^2 - 1}{t} \\ &= \lim_{t \to 0+} \frac{-2xt - t^2}{t} \\ &= -2x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{t \to 0-} \frac{f(x+t,y) - f(x,y)}{t} &= \lim_{t \to 0-} \frac{(x+t)^2 + y^2 - (x^2 + y^2)}{t} \\ &= \lim_{t \to 0-} \frac{2xt + t^2}{t} \\ &= 2x \end{aligned}$$

Tedy parciální derivace neexistuje.
V bodech $x < 0$ je analogická situace (prohodí se limity zleva a zprava) a derivace také neexistuje.
V bodech $x = 0$ máme

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0} \frac{f(x+t,y)-f(x,y)}{t} &= \lim_{t\to 0} \frac{2-(x+t)^2-y^2-(x^2+y^2)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{2-x^2-2xt-t^2-y^2-1}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{-2xt-t^2}{t} \\ &= -2x = 0.\end{aligned}$$

- Protože funkce f je symetrická ($f(x,y) = f(y,x)$), parciální derivace podle y vyjdou analogicky, tedy

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \begin{cases} 0, & y = 0, \\ \nexists, & \text{jinak.} \end{cases}$$

- Závěr:
  i. Pro $x^2 + y^2 < 1$ máme
$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$$
  ii. Pro $x^2 + y^2 > 1$ máme
$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2x$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2y$$

iii. Pro $x^2+y^2=1$ máme

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\begin{cases}0, & x=0,\\ \nexists, & \text{jinak.}\end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\begin{cases}0, & y=0,\\ \nexists, & \text{jinak.}\end{cases}$$

- Rovnice tečné roviny: Parciální dervivace funkce f jsou v bodě a spojité. Tedy v bodě a existuje totální diferenciál a tedy i tečná rovina. V bodě a máme

$$f(a)=-3$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}(a)=-2$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(a)=-4$$

Tedy tečná rovina má rovnici

$$z+3=-2(x-1)-4(y-2).$$

(e) $f(x,y)=\sqrt[3]{\ln\frac{x}{y}}$, $a=[1,2]$

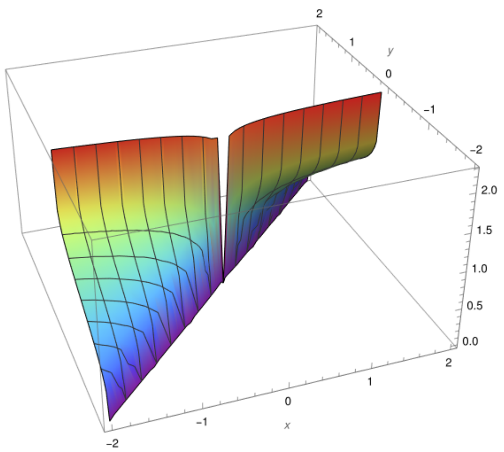
Řešení:

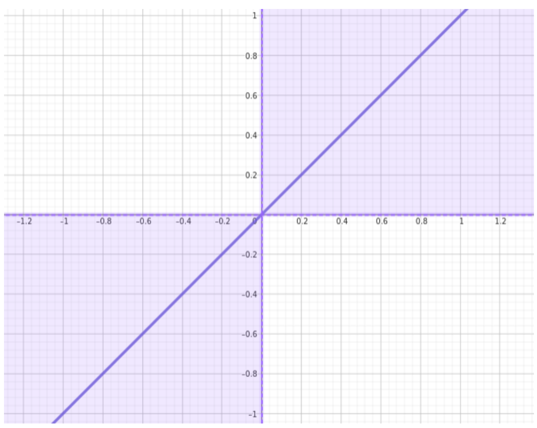
- Definiční obor:

$$D_f=\{[x,y]\in\mathbb{R}^2 : xy>0\}.$$

- Pro $x\neq y$ máme

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{\log^2\frac{x}{y}}}\cdot\frac{1}{x}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{\log^2\frac{x}{y}}}\cdot\frac{1}{y}$$





- Pro $x = y$ máme

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(x+t,y)-f(x,y)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\sqrt[3]{\log \frac{(x+t)}{y}} - \sqrt[3]{\log \frac{x}{y}}}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{\sqrt[3]{\log \frac{(x+t)}{x}}}{t} = \lim_{t\to 0} \sqrt[3]{\frac{\log\left(1+\frac{t}{x}\right)}{t^3}} \\
&= \lim_{t\to 0} \sqrt[3]{\frac{\log\left(1+\frac{t}{x}\right)}{\frac{t}{x}} \cdot \frac{1}{xt^2}} \\
&= \begin{cases} \infty, & x > 0 \\ -\infty, & x < 0. \end{cases}
\end{aligned}
$$

- Parciální derivace podle y spočteme analogicky. (Lze užít faktu, že $\log \frac{x}{y} = -\log \frac{y}{x}$.)

$$
\frac{\partial f}{\partial y} = \begin{cases} -\infty, & y > 0, \\ \infty, & y < 0. \end{cases}
$$

- Závěr:
  i. Pro $x \neq y$ máme

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{1}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{\log^2 \frac{x}{y}}} \cdot \frac{1}{x} \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= -\frac{1}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{\log^2 \frac{x}{y}}} \cdot \frac{1}{y}
\end{aligned}
$$

  ii. Pro $x = y$ neexistují.

- Rovnice tečné roviny: Parciální dervivace funkce f jsou v bodě a spojité. Tedy v bodě a existuje totální diferenciál a tedy i tečná rovina. V bodě a máme

$$
\begin{aligned}
f(a) &= \sqrt[3]{\log \frac{1}{2}} \\
\frac{\partial f}{\partial x}(a) &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{\log^2 \frac{1}{2}}} \\
\frac{\partial f}{\partial y}(a) &= -\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{\log^2 \frac{1}{2}}}
\end{aligned}
$$

  Tedy tečná rovina má rovnici

$$
z - \sqrt[3]{\log \frac{1}{2}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{\log^2 \frac{1}{2}}}(x-1) - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{\log^2 \frac{1}{2}}}(y-2)
$$

(f) $f(x,y) = x^{(y^x)}$, $a = [1,2]$
Řešení:

- Funkci přepíšeme jako

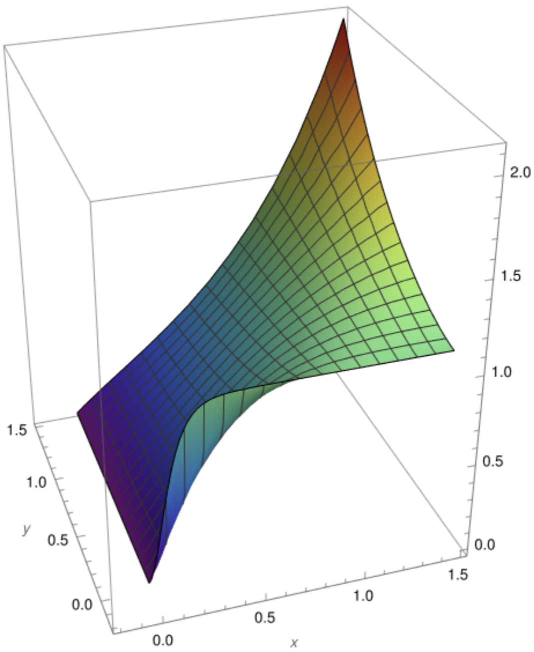
$$x^{(y^x)} = e^{y^x \log x} = e^{e^{(x \log y)} \log x}$$

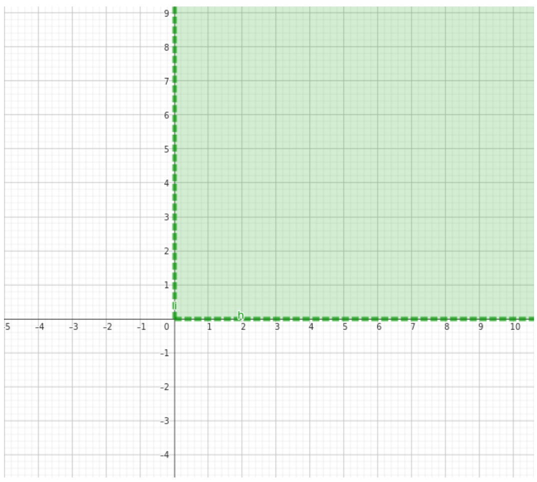
Definiční obor:

$$D_f = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x > 0, y > 0\}$$

- Pro $x > 0$, $y > 0$ máme

$$\frac{\partial f}{\partial x} = x^{(y^x)} \left(y^x \log y \log x + y^x \frac{1}{x} \right)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^{(y^x)} \left(x y^{x-1} \log x \right)$$





- Žádné speciální body nemáme.
- Rovnice tečné roviny: Parciální dervivace funkce f jsou v bodě a spojité. Tedy v bodě a existuje totální diferenciál a tedy i tečná rovina. V bodě a máme

$$f(a) = 1$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = 2$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(a) = 0$$

Tedy tečná rovina má rovnici

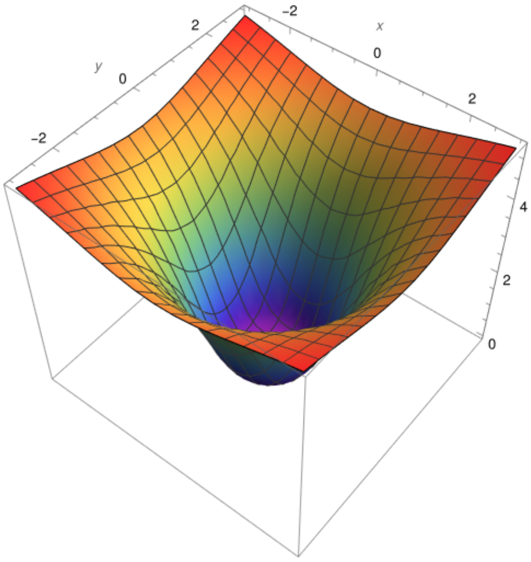
$$z - 1 = 2(x - 1).$$

(g) $f(x,y) = (\arctan \sqrt{x^2+y^2})^4$, $a = [1,2]$

Řešení:

- Definiční obor:

$$D_f = \mathbb{R}^2$$



- Pro $x^2+y^2 \neq 0$ máme

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4(\arctan(\sqrt{x^2+y^2}))^3 \cdot \frac{x}{1+x^2+y^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 4(\arctan(\sqrt{x^2+y^2}))^3 \cdot \frac{y}{1+x^2+y^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

- Pro $(x,y) = (0,0)$ máme

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(x+t,y)-f(x,y)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{(\arctan(\sqrt{(0+t)^2+0^2}))^4 - (\arctan(\sqrt{0^2+0^2}))^4}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{(\arctan(\sqrt{t^2}))^4}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\arctan^4 |t|}{|t|^4} \cdot \frac{|t|^4}{t} \\ &= 1^4 \cdot 0 = 0.\end{aligned}$$

- Protože funkce f je symetrická ($f(x,y) = f(y,x)$), parciální derivace podle y vyjde analogicky, tedy

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

- Závěr:

i. Pro $(x,y) \neq (0,0)$ máme

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4(\arctan(\sqrt{x^2+y^2}))^3 \cdot \frac{x}{1+x^2+y^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 4(\arctan(\sqrt{x^2+y^2}))^3 \cdot \frac{y}{1+x^2+y^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

ii. Pro $(0,0)$ máme

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

- Rovnice tečné roviny: Parciální dervivace funkce f jsou v bodě a spojité. Tedy v bodě a existuje totální diferenciál a tedy i tečná rovina. V bodě a máme

$$f(a) = \arctan^4 \sqrt{5}$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = \frac{2}{3} \arctan^3 \sqrt{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(a) = \frac{4}{3} \arctan^3 \sqrt{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Tedy tečná rovina má rovnici

$$z - \arctan^4 \sqrt{5} = \frac{2}{3} \arctan^3 \sqrt{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}(x-1) + \frac{4}{3} \arctan^3 \sqrt{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}(y-2)$$

(h) $f(x,y) = \begin{cases} \sin(x\cos y),\ x \geq 0 \\ \cos(x \sin y) + 2,\ x < 0 \end{cases}$, $a = [1,2]$

Řešení:

- Definiční obor:

$$D_f = \mathbb{R}^2$$

- Pro $x > 0$ máme

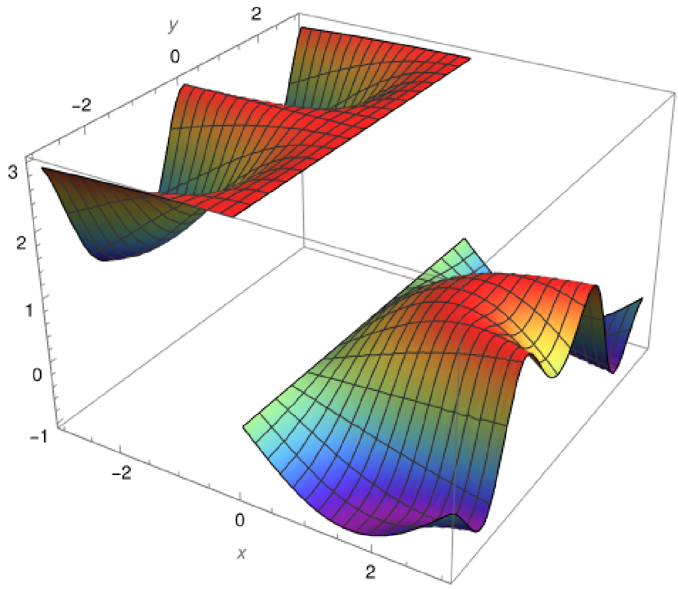
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos(x\cos y)\cos y$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\cos(x\cos y)x\sin y$$

- Pro $x < 0$ máme

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\sin(x\sin y)\sin y$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\sin(x\sin y)x\cos y$$

- Parciální derivace podle x pro $x = 0$:
  Spočteme zvlášť limitu zprava a zleva

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0+} \frac{f(x+t,y)-f(x,y)}{t} &= \lim_{t\to 0+} \frac{\sin((x+t)\cos y) - \sin(x\cos y)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0+} \frac{\sin((x+t)\cos y) - 0}{t}\end{aligned}$$



Pro $y = \frac{\pi}{2} + k\pi$ je $\cos y = 0$ a máme limitu

$$\lim_{t\to 0+} \frac{\sin(0) - 0}{t} = 0.$$

Pro $y \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ je $\cos y \neq 0$ a máme limitu

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0+} \frac{\sin((x+t)\cos y)}{t} &= \lim_{t\to 0+} \frac{\sin(t\cos y)}{t\cos y} \cdot \cos y \\ &= \cos y\end{aligned}$$

Zleva:

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0-} \frac{f(x+t,y) - f(x,y)}{t} &= \lim_{t\to 0-} \frac{\cos((x+t)\sin y) + 2 - \sin(x\sin y)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0-} \frac{\cos(t\cos y) + 2}{t} \\ &= -\infty\end{aligned}$$

Limita tedy neexistuje.

- Parciální derivace podle y pro $x = 0$.

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0} \frac{f(x,y+t) - f(x,y)}{t} &= \lim_{t\to 0} \frac{\sin((x)\cos(y+t)) - \sin(x\cos y)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{\sin((x)\cos(y+t)) - 0}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{0}{t} \\ &= 0.\end{aligned}$$

- Závěr:

i. Pro $x > 0$ máme

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos(x\cos y)\cos y$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\cos(x\cos y)x\sin y$$

ii. Pro $x < 0$ máme

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\sin(x\sin y)\sin y$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\sin(x\sin y)x\cos y$$

iii. Pro $x = 0$ máme

$$\frac{\partial f}{\partial x} \nexists$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

- Rovnice tečné roviny: Parciální dervivace funkce f jsou v bodě a spojité. Tedy v bodě a existuje totální diferenciál a tedy i tečná rovina. V bodě a máme

$$\begin{aligned} f(a) &= \sin(\cos 2) \\ \frac{\partial f}{\partial x}(a) &= \cos(\cos 2)\cos 2 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(a) &= -\cos(\cos 2)\sin 2 \end{aligned}$$

Tedy tečná rovina má rovnici

$$z - \sin(\cos 2) = \cos(\cos 2)\cos 2(x-1) - \cos(\cos 2)\sin 2(y-2)$$

Bonusové příklady

3. Najděte parciální derivace 1. řádu podle všech proměnných, určete D_f a $D_{f'}$.

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & y \in \mathbb{Q}, \\ 0, & y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Řešení: Zdroj: https://matematika.cuni.cz/ikalkulus.html
Funkce je definovaná na celém $\mathbb{R}^2$. Protože funkce je konstantní ve směru osy x, je ve všech bodech

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

Protože ve směru osy y jde o Dirichletovu funkci, tak $\frac{\partial f}{\partial y}$ nemá derivaci v žádném bodě.

4. Nechť T je tečná rovina ke grafu funkce $f(x,y) = -x^2 - y^2 + 2x + 4y - 4$, která je kolmá k přímce $\{(t,t,t) \in \mathbb{R}^3 : t \in \mathbb{R}\}$. Ve kterém bodě protíná T osu z (přímku $\{(0,0,t) \in \mathbb{R}^3 : t \in \mathbb{R}\}$)?

Pozn.: Normála ke grafu funkce je určena rovnicemi

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0; y_0)t \\ y &= y_0 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0; y_0)t \qquad\qquad t \in \mathbb{R} \\ z &= z_0 - t \end{aligned}$$

Řešení:
Zdroj: Petr Holický, Ondřej F.K. Kalenda : Metody řešení vybraných úloh z matematické analýzy pro 2. - 4. semestr
Spočtěme parciální derivace funkce f v obecném bodě (x, y). Máme

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= -2x + 2 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= -2y + 4. \end{aligned}$$

Obě parciální derivace jsou spojité funkce, tedy existuje totální diferenciál a tečná rovina v bodě (x_0, y_0) je tvaru

$$z - f(x_0, y_0) = (-2x_0 + 2)(x - x_0) + (-2y_0 + 4)(y - y_0)$$

Její normála je

$$\begin{aligned} x &= x_0 + (-2x_0 + 2)t \\ y &= y_0 + (-2y_0 + 4)t \qquad\qquad t \in \mathbb{R} \\ z &= z_0 - t \end{aligned}$$

Aby normálový vektor byl násobkem vektoru $(1, 1, 1)$, tak musí platit

$$\begin{aligned} k &= (-2x_0 + 2) \\ k &= (-2y_0 + 4) \\ k &= -1 \end{aligned}$$

Tedy $x_0 = \frac{3}{2}$, $y_0 = \frac{5}{2}$. Tedy

$$\begin{aligned} z - \frac{1}{2} &= -\left(x - \frac{3}{2}\right) - \left(y - \frac{5}{2}\right) \\ z &= -x - y + \frac{9}{2} \end{aligned}$$

Pro $x = y = 0$ dostaneme

$$z = \frac{9}{2}.$$

Hledaná rovina protíná osu z v bodě $(0, 0, \frac{9}{2})$.