5. cvičení – Limity funkcí více proměnných

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Příklady – definiční obor

1. Určete definiční obor a načrtněte (příklady ze zkoušek)

   (a) $f(x, y) = \arcsin(x + y) + \arctan(x + y) + xy$
   Řešení:
   Kvůli definičnímu oboru funkce arcsin potřebujeme

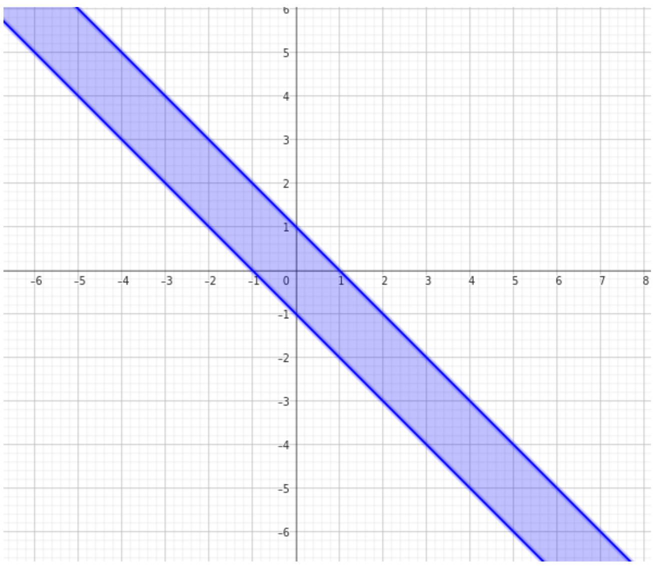
$$-1 \leq x + y \leq 1$$

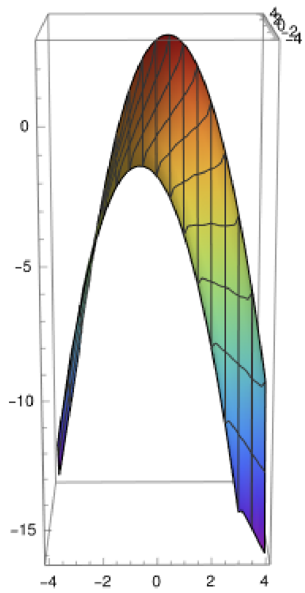
   tedy

$$y \leq 1 - x, \qquad -1 - x \leq y.$$

   Závěr:

$$D_f = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : y \leq 1 - x,\ -1 - x \leq y.\}$$





   (b) $f(x, y) = \log\left(\dfrac{x}{|x| - |y|}\right)$
   Řešení: Máme podmínky

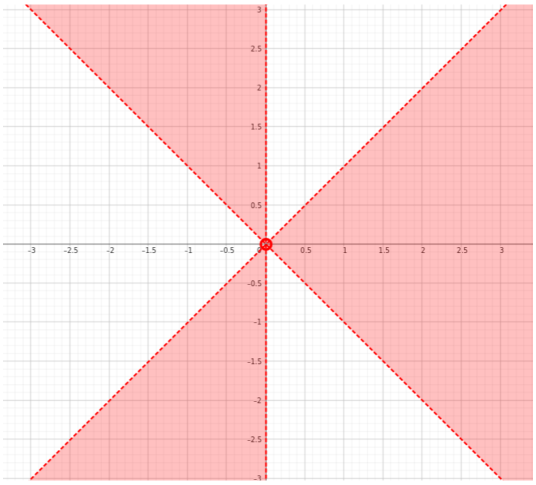
$$x \neq 0, \qquad |x| \neq |y|, \qquad \frac{x}{|x| - |y|} > 0$$

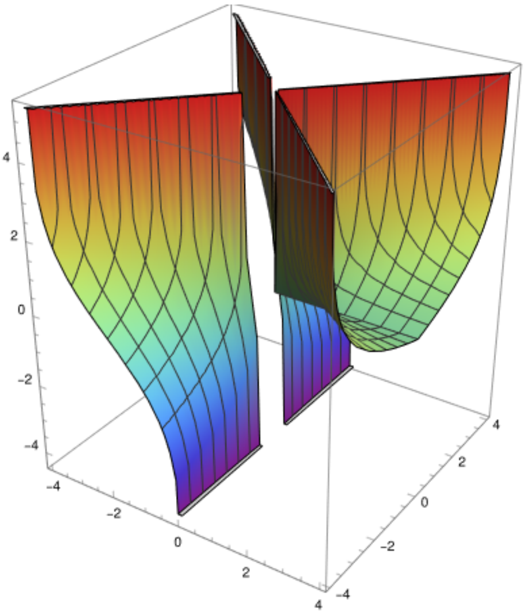
   Tedy získáme nerovnice

$$(x > 0\ \wedge\ |x| - |y| > 0)\ \vee\ (x < 0\ \wedge\ |x| - |y| < 0).$$

Závěr:

$$D_f = \left\{ [x,y] \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0, |x| \neq |y|, \frac{x}{|x|-|y|} > 0 \right\}$$





(c) $f(x,y) = \sqrt{xy - y^3 + 2y^2}$

Řešení: Podmínky:

$$y(x - y^2 + 2y) \geq 0$$

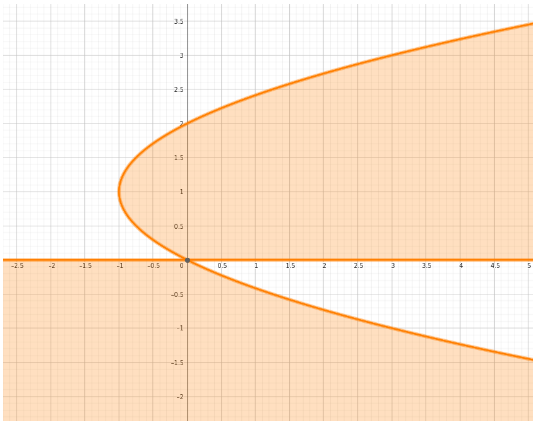
Tedy

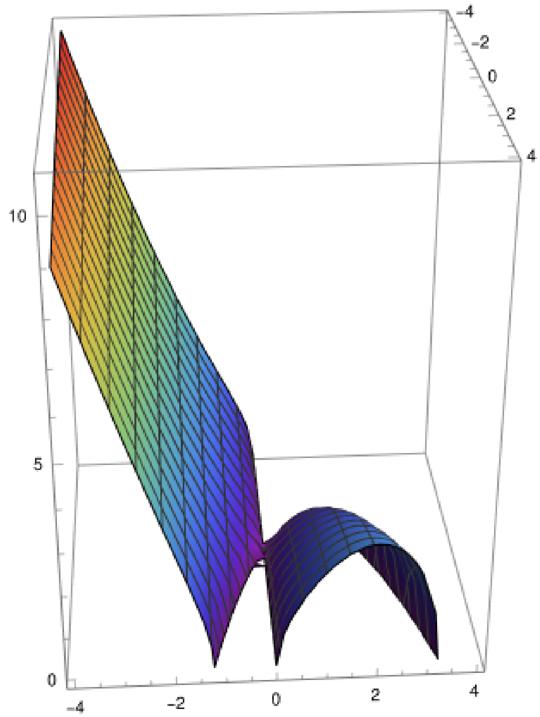
- $y = 0$, $x \in \mathbb{R}$, nebo
- $x = y^2 - 2y$, nebo
- $x \geq y^2 - 2y \ \wedge \ y \geq 0$, nebo
- $x \leq y^2 - 2y \ \wedge \ y \leq 0$.

Navíc lze upravit $y^2 - 2y = (y-1)^2 - 1$.

Závěr:

$$D_f = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : y(x - y^2 + 2y) \geq 0\}$$





(d) $f(x,y) = \arcsin\sqrt{x(x+y)}$

Řešení: Podmínky

$$0 \le x(x+y) \le 1$$

Tedy

- $x \ge 0 \ \wedge \ y \ge -x$, nebo
- $x \le 0 \ \wedge \ y \le -x$, nebo
- $x = 0$, $y \in \mathbb{R}$, nebo
- $y = -x$.

Zároveň musí být splněno

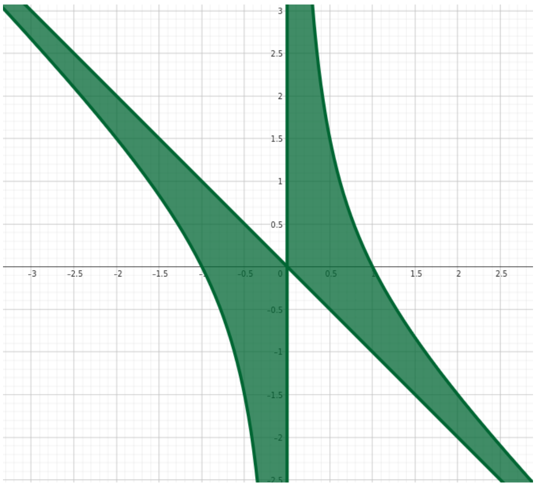
$$\begin{aligned} x(x+y) &\le 1 \\ x^2 + xy &\le 1 \\ xy &\le 1 - x^2 \end{aligned}$$

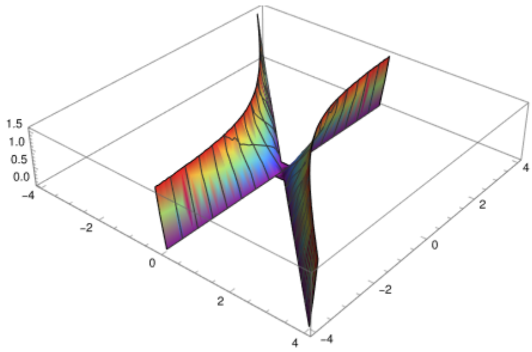
Tedy

- $x = 0$, $y \in \mathbb{R}$, nebo
- $x > 0 \ \wedge \ y \le \frac{1}{x} - x$, nebo
- $x < 0 \ \wedge \ y \ge \frac{1}{x} - x$.

Závěr:

$$D_f = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x(x+y) \le 1\}$$





Příklady – limity, které ilustrují různé situace

2. Určete limity funkcí více proměnných, nebo ukažte, že neexistují.

   (a) Ukažte, že pro funkci $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x+y}$ platí

   $$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right) = 1, \qquad \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right) = -1$$

   a

   $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \text{ neexistuje.}$$

   Řešení:
   Nejprve vypočteme obě dvojnásobné limity. Uvědomme si, že vnitřní limitu přes y (resp. x) nám stačí počítat pro hodnoty parametru x (resp. y) různé od limitního bodu, tj. v našem konkrétním případě pro $x \neq 0$ (resp. $y \neq 0$).
   Platí, že

   $$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right) = \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} \frac{x-y}{x+y}\right) =$$

   pro libovolnou hodnotu „parametru“ x různou od nuly je funkce (proměnné y) v bodě nula spojitá, a proto po dosazení $y=0$ máme

   $$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{x-0}{x+0}\right) = 1.$$

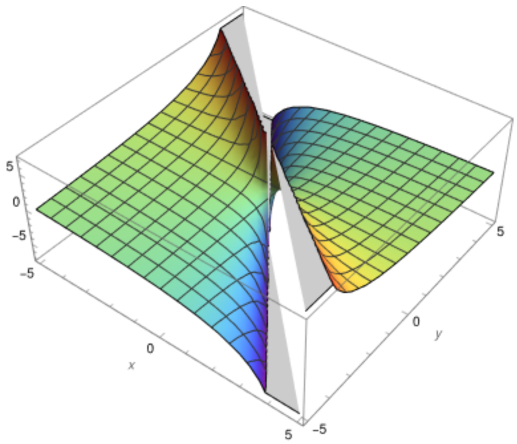
   Obdobně vypočteme

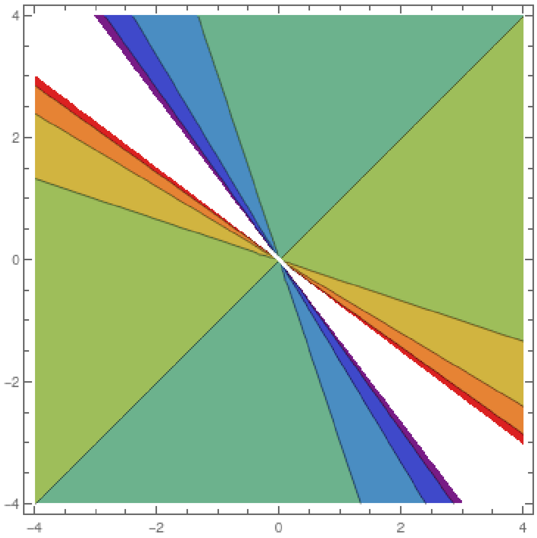
   $$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right) = \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} \frac{x-y}{x+y}\right) =$$

   pro libovolnou hodnotu „parametru“ y různou od nuly je funkce (proměnné x) v bodě nula spojitá, a proto po dosazení $x=0$ máme

   $$= \lim_{y\to 0}\left(\frac{0-y}{0+y}\right) = -1.$$

   Protože dvojnásobné limity existují a nerovnají se, nemůže dvojná limita existovat.





(b) Ukažte, že pro funkci $f(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x-y)^2}$ platí

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right) = 0 \qquad \text{a} \qquad \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right) = 0,$$

ale

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \text{ neexistuje.}$$

Řešení:
Vypočtěme nejprve dvojnásobné limity. Uvědomme si, že funkce $f(x,y)$ je jako funkce proměnné y pro pevnou hodnotu $x \neq 0$ spojitá pro všechna $y \in \mathbb{R}$, speciálně v bodě nula. Máme tedy, že pro $x \neq 0$ je

$$\lim_{y\to 0} \frac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x-y)^2} = 0.$$

Proto

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right) = \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} \frac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x-y)^2}\right) = \lim_{x\to 0}(0) = 0.$$

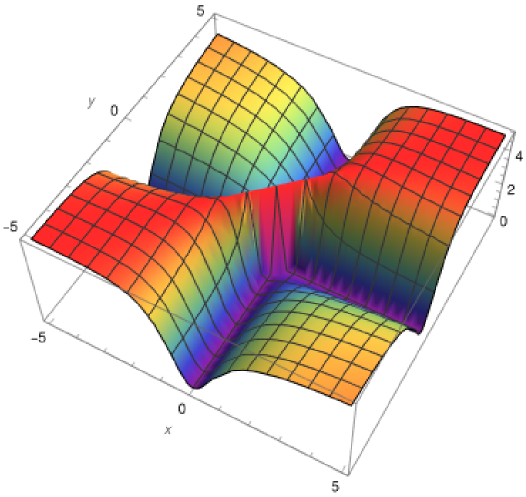
Obdobně dostaneme, že

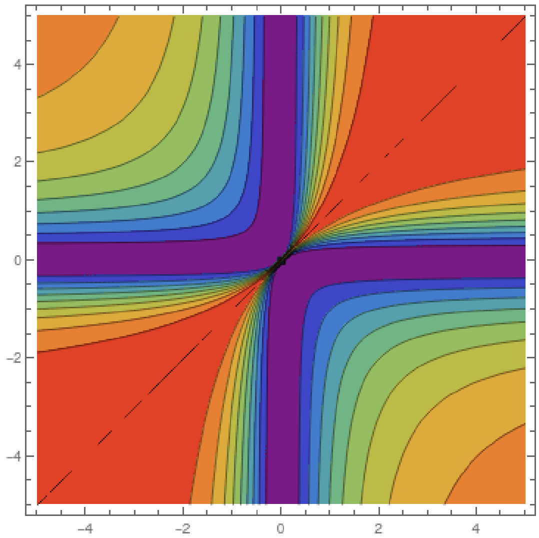
$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right) = \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} \frac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x-y)^2}\right) = \lim_{y\to 0}\left(\frac{0}{0 + (0-y)^2}\right) = 0.$$

Určeme nyní limitu po přímce $y = x$ pro $x \to 0$ (potom samozřejmě také $y \to 0$). Máme, že

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \cdot x^2}{x^2 \cdot x^2 + (x-x)^2} = 1,$$

a protože limita po přímce $y = x$ a dvojnásobné limity existují a nejsou shodné, dvojná limita nemůže existovat.





(c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y}{x^6+y^2}$

Řešení:

Vypočtěme nejprve dvojnásobné limity. Pro $x \neq 0$ máme

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{x^3y}{x^6+y^2}\right) = \lim_{x\to 0} 0 = 0.$$

Pro $y \neq 0$ analogicky

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{x^3y}{x^6+y^2}\right) = \lim_{y\to 0} 0 = 0.$$

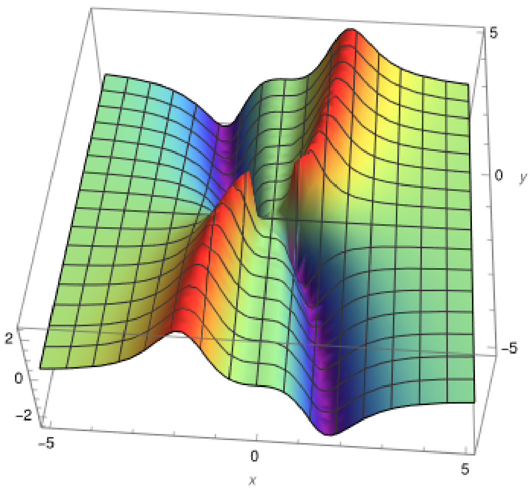
Nyní limita po přímce $y = kx$, $k \in \mathbb{R}$. Máme

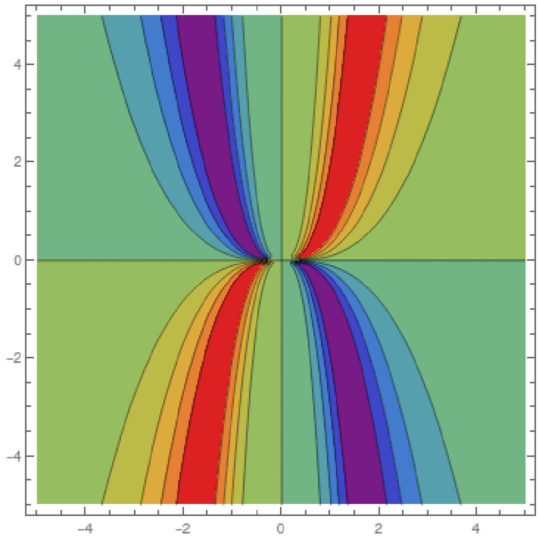
$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3kx}{x^6+(kx)^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2}\frac{kx^2}{x^4+k^2} = 0.$$

Zkusme křivku $y = x^3$. Pak

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3x^3}{x^6+(x^3)^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x^6}{2x^6} = \frac{1}{2}.$$

Tedy limita neexistuje.





(d) $\lim_{(x,y)\to[0,0]} x\frac{xy}{x^2+y^2}$

Řešení: Použijeme nápovědu $\pm 2xy \le x^2+y^2$. Pak máme

$$\frac{xy}{x^2+y^2} \le \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} = \frac{1}{2}$$

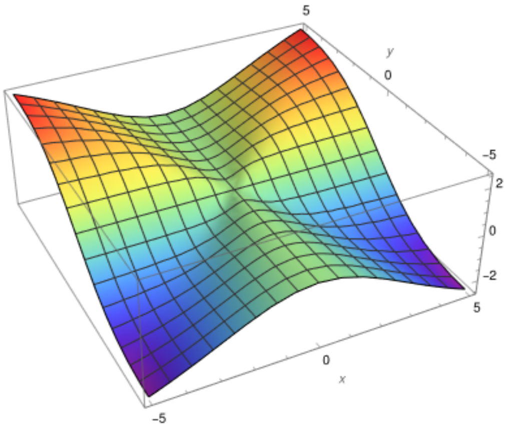
$$\frac{xy}{x^2+y^2} \ge -\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} = -\frac{1}{2}$$

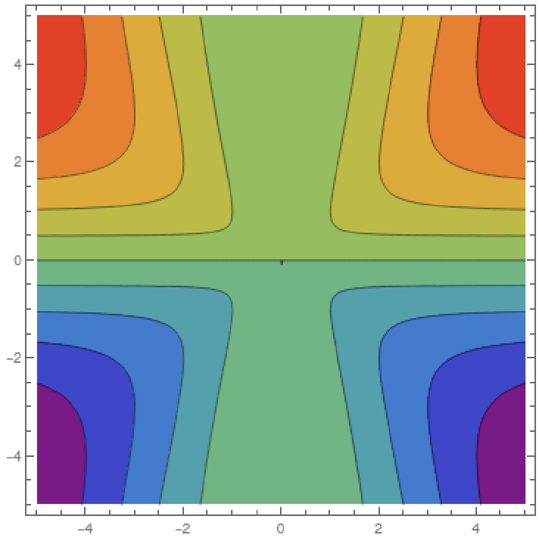
Navíc

$$\lim_{(x,y)\to[0,0]} x = 0,$$

tedy z věty o omezené a mizející máme

$$\lim_{(x,y)\to[0,0]} x\frac{xy}{x^2+y^2} = 0.$$





(e) $\lim_{(x,y)\to(4,0)} \frac{\operatorname{tg}\sqrt{(x-4)^2-y^2}}{x^2\sqrt{(x-4)^2-y^2}}$

Řešení:

Zkusíme aplikovat známé limity a aritmetiku limit, tedy:

$$\lim_{(x,y)\to(4,0)} \frac{\operatorname{tg}\sqrt{(x-4)^2-y^2}}{x^2\sqrt{(x-4)^2-y^2}} \overset{VOAL}{=} \lim_{(x,y)\to(4,0)} \frac{\operatorname{tg}\sqrt{(x-4)^2-y^2}}{\sqrt{(x-4)^2-y^2}} \cdot \lim_{(x,y)\to(4,0)} \frac{1}{x^2}$$

Ze spojitosti máme

$$\lim_{(x,y)\to(4,0)} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{16}.$$

Zbývá první limita. Pro funkce jedné proměnné platí

$$\lim_{t\to 0} \frac{\tan t}{t} = 1.$$

Navíc (ze spojitosti)

$$\lim_{(x,y)\to(4,0)} \sqrt{(x-4)^2-y^2} = 0$$

Pokud ověříme podmínky, tak z věty o limitě složené funkce budeme mít

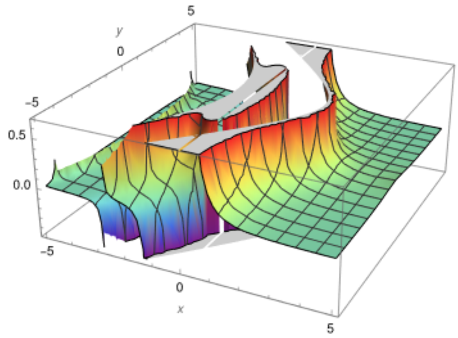
$$\lim_{(x,y)\to(4,0)} \frac{\operatorname{tg}\sqrt{(x-4)^2-y^2}}{\sqrt{(x-4)^2-y^2}} = 1$$

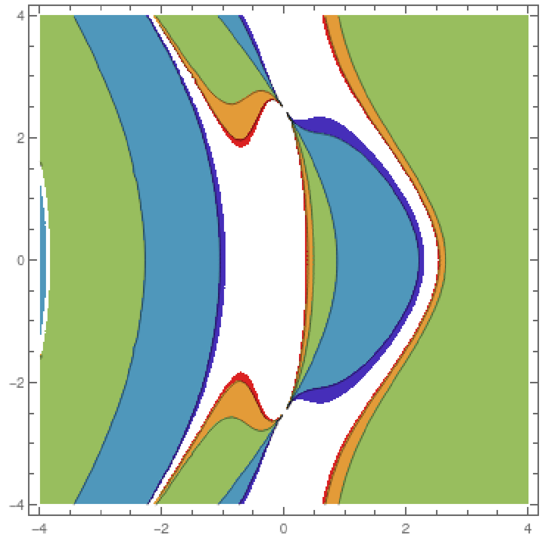
a dohromady

$$\lim_{(x,y)\to(4,0)} \frac{\operatorname{tg}\sqrt{(x-4)^2-y^2}}{x^2\sqrt{(x-4)^2-y^2}} = \frac{1}{16}.$$

Podmínky, konkrétně podmínka (P) (vnitřní funkce se vyhýbá své limitě): hledáme okolí bodu $(4,0)$ takové, aby

$$\sqrt{(x-4)^2-y^2} \neq 0.$$





Navíc se pohybujeme pouze na množině $A = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : (x-4)^2 - y^2 > 0\}$ - to je kvůli definičnímu oboru funkce v limitě.
Požadavek $\sqrt{(x-4)^2 - y^2} > 0$ je ale splněn např. na $B((4,0),1) \cap A$, tedy jsme ověřili podmínku (P) a jsme hotovi.

(f) Ukažte, že pro funkci $f(x,y) = (x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$ limity

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right) \qquad \text{a} \qquad \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right) \qquad \text{neexistují,}$$

ale

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \text{ vzhledem k definičnímu oboru funkce } f \text{ existuje a je rovna nule.}$$

Řešení:
Uvědomme si, že pro žádné $x \neq \frac{1}{\pi k}$ pro $k \in \mathbb{Z}$ neexistuje limita

$$\lim_{y\to 0}(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}.$$

Formálně to lze nahlédnout pomocí Heineho věty. Volme-li $y_n = 1/2\pi n$, potom

$$\lim_{n\to\infty}(x+y_n)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y_n} = \lim_{n\to\infty}(x+\frac{1}{2\pi n})\sin\frac{1}{x}\sin(2\pi n) = 0,$$

zatímco pro volbu $y_n = 1/(\pi/2 + 2\pi n)$ je

$$\lim_{n\to\infty}(x+y_n)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y_n} = \lim_{n\to\infty}(x+\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi n})\sin\frac{1}{x}\sin\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n\right) = (x+0)\sin\frac{1}{x} \neq 0.$$

Tudíž nemůže existovat ani dvojnásobná limita

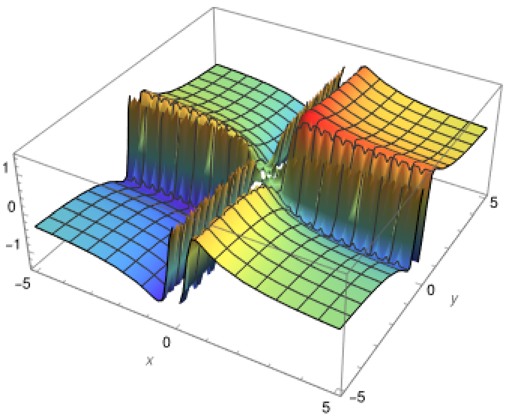
$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right),$$

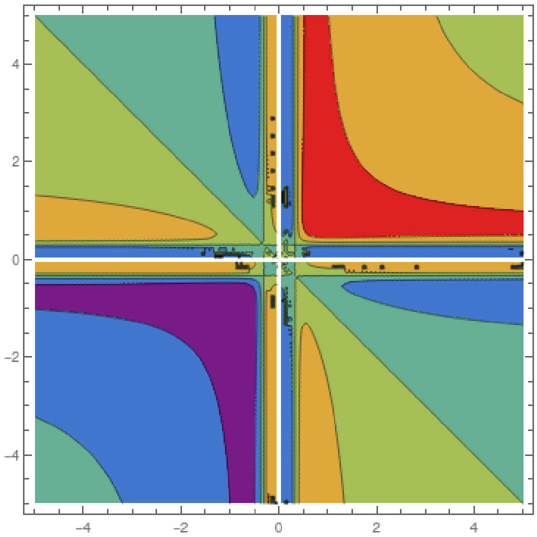
protože vnitřní limita není definována na žádném intervalu hodnot $x \in (-\varepsilon, +\varepsilon)$. Ze stejného důvodu neexistuje ani druhá z dvojnásobných limit.

Naopak dvojná limita
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0.$$

To proto, že
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x+y) = 0+0 = 0,$$

neboť polynom $(x+y)$ je spojitá funkce, a dále protože, že funkce $\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$ je omezená. Tudíž podle věty o omezené a mizející, je výsledek roven 0.





3. Shrňte, jaké situace jsme zatím potkali. (Např. existuje dvojná limita, ale neexistuje limita; existují limity po přímkách, ale limita neexistuje;...)

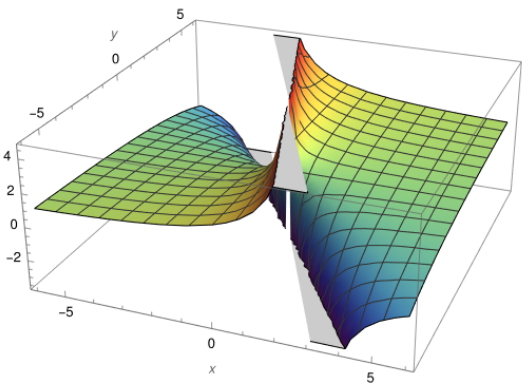
Příklady – limity na procvičení

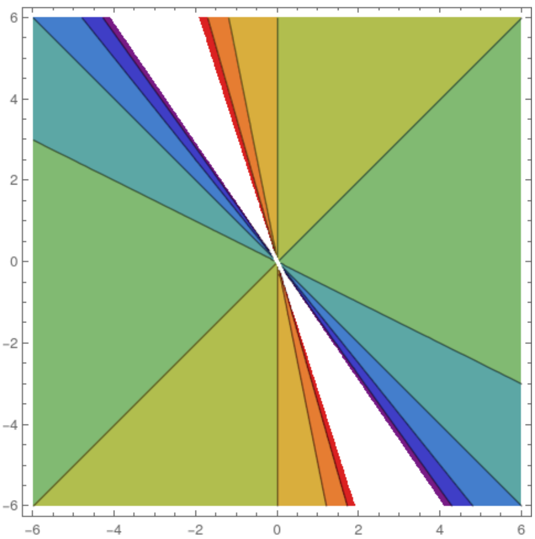
4. Určete limity funkcí více proměnných, nebo ukažte, že neexistují.

(a) $\lim\limits_{[x,y]\to[2,4]} \dfrac{x+2y}{2x+y}$

Řešení: Funkce je spojitá, po dosazení

$$\lim_{[x,y]\to[2,4]} \frac{x+2y}{2x+y} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}.$$





(b) $\lim\limits_{[x,y]\to[-1,0]} \dfrac{xy+2x+y+2}{xy^2+y^2+x+1}$

Řešení: Vytkneme

$$\lim_{[x,y]\to[-1,0]} \frac{xy+2x+y+2}{xy^2+y^2+x+1} = \lim_{[x,y]\to[-1,0]} \frac{x(y+2)+(y+2)}{y^2(x+1)+(x+1)} = \lim_{[x,y]\to[-1,0]} \frac{(x+1)(y+2)}{(y^2+1)(x+1)}$$
$$= \lim_{[x,y]\to[-1,0]} \frac{(y+2)}{(y^2+1)} = 2$$

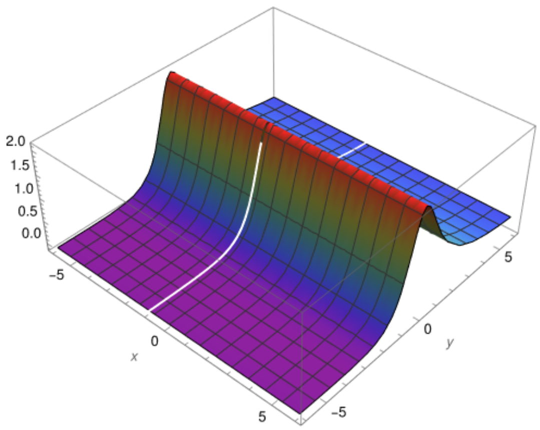
(c) $\lim\limits_{[x,y]\to[1,2]} \dfrac{x^2y^2-4}{x^4+y^4-17}$

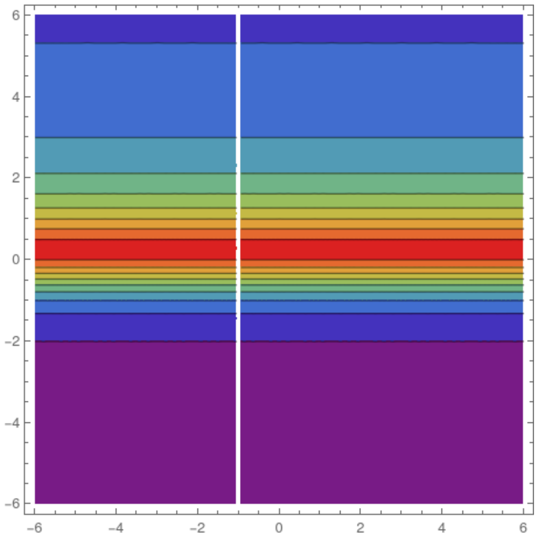
Řešení: Spočteme dvojnásobné limity

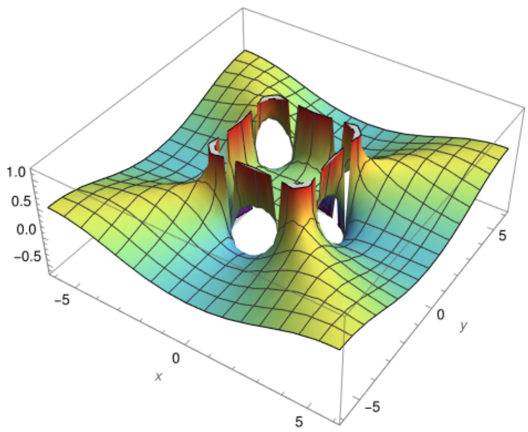
$$\lim_{x\to1}\left(\lim_{y\to2} \frac{x^2y^2-4}{x^4+y^4-17}\right) = \lim_{x\to1} \frac{4x^2-4}{x^4-1} = \lim_{x\to1} \frac{4(x^2-1)}{(x^2-1)(x^2+1)} = 2$$

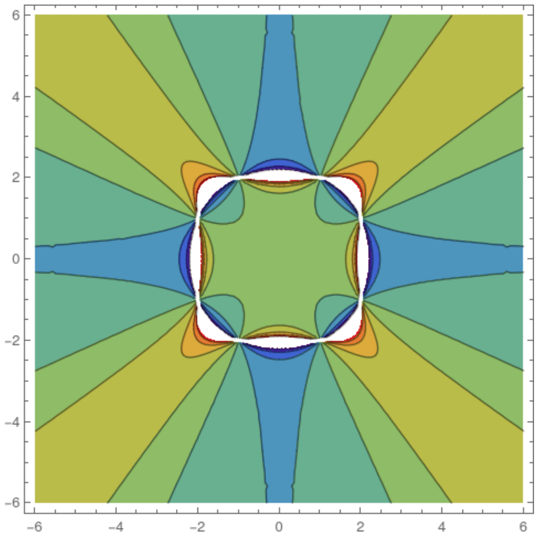
$$\lim_{y\to2}\left(\lim_{x\to1} \frac{x^2y^2-4}{x^4+y^4-17}\right) = \lim_{y\to2} \frac{y^2-4}{y^4-16} = \lim_{y\to2} \frac{y^2-4}{(y^2-4)(y^2+4)} = \frac{1}{8}$$

Jelikož obě dvojnásobné limity existují, ale nerovnají se, tak původní limita neexistuje.









(d) $\displaystyle\lim_{[x,y]\to[2,0]} \frac{\tan xy}{y}$

Řešení: Myšlenka: Rozšíříme a pak aplikujeme VOLSF a známou limitu:

$$\lim_{[x,y]\to[2,0]} \frac{\tan xy}{y} = \lim_{[x,y]\to[2,0]} x\frac{\tan xy}{xy} = 2\cdot 1 = 2.$$

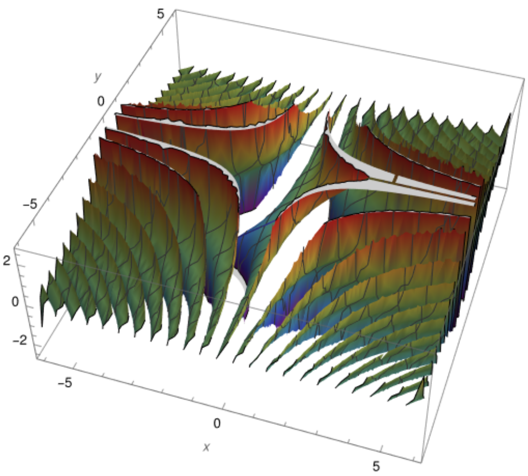
Technické provedení:

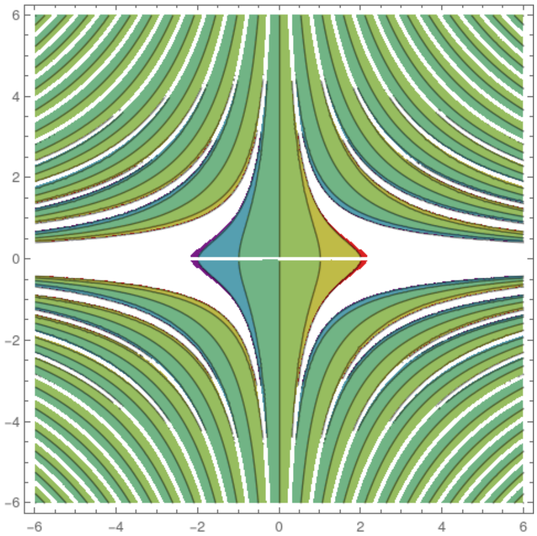
Funkce $f(x,y) = \frac{\tan xy}{y}$ je definovaná na množině $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{[x,0], x \in \mathbb{R}\}$. Počítáme tedy limitu vzhledem k M.

VOLSF aplikujeme na funkci: $g(x,y) = \frac{\tan xy}{xy}$, kterou lze rozložit na funkce $g_1(t) = \frac{\tan t}{t}$ a $g_2(x,y) = xy$.

Pak máme $\lim_{t\to 0} g_1(t) = 1$ a $\lim_{[x,y]\to[2,0]} xy = 0$.

Podmínka (P): funkce $xy \neq 0$ na okolí $M \cap B([2,0],1) \setminus \{[2,0]\}$.





(e) $\displaystyle\lim_{[x,y,z]\to[0,0,0]} x \sin\frac{1}{x-y+z}$

Řešení: Použijeme větu o součinu omezené a mizející funkce. Máme

$$\left|\sin\frac{1}{x-y+z}\right| \le 1$$

a ze spojitosti

$$\lim_{[x,y,z]\to[0,0,0]} x = 0.$$

Dohromady

$$\lim_{[x,y,z]\to[0,0,0]} x \sin\frac{1}{x-y+z} = 0$$

DOPLNIT

(f) $\displaystyle\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}$

Řešení: Užijeme odhady

$$0 \le \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2} \le x^2+y^2$$

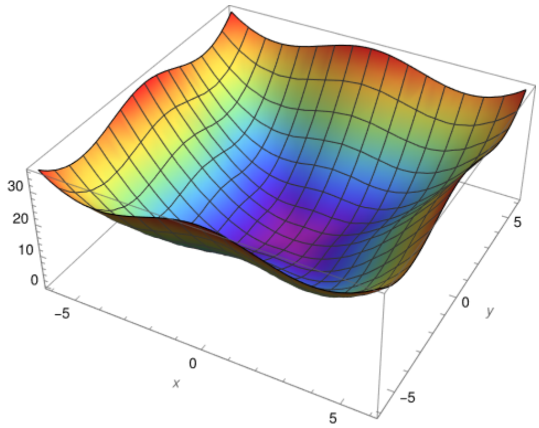
Ze dvou policajtů máme

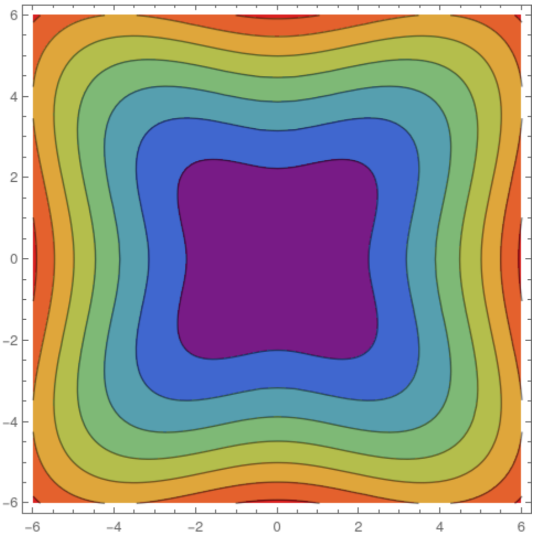
$$\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2} = 0.$$

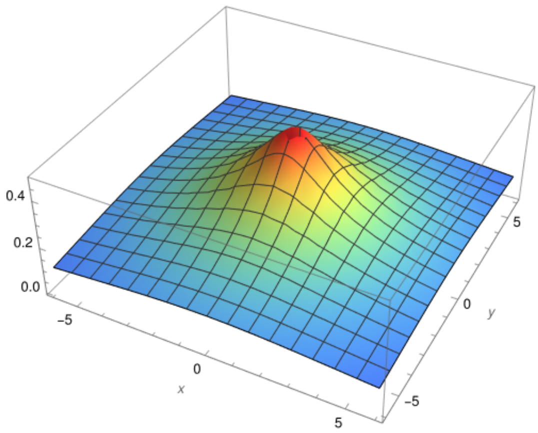
(g) $\displaystyle\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}{x^2+y^2}$

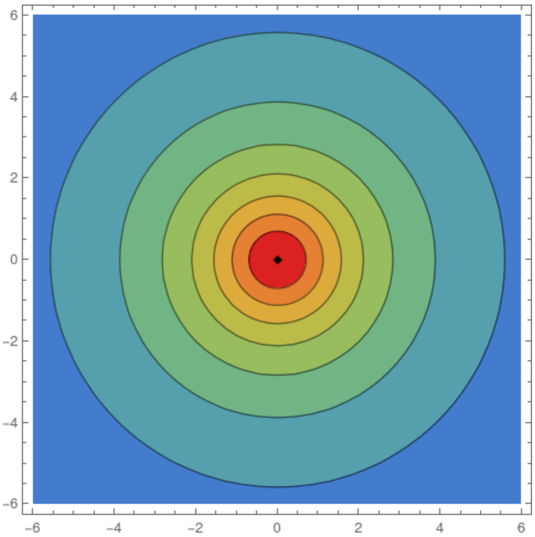
Řešení: Rozšíříme dle vzorce

$$\begin{aligned}\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}{x^2+y^2} &= \lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{x^2+y^2+1-1}{x^2+y^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+1}+1}\\ &= \lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+1}+1} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$









(h) $\displaystyle\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{1}{x^2+y^2}$

Řešení: Funkce vypadá, že je neomezená. Ukážeme z definice. Zvolme $K>0$. K němu najdeme $\delta = 1/K$. Pak pro (x,y): $x^2+y^2<\delta$ máme

$$\frac{1}{x^2+y^2} > \frac{1}{\delta} = K,$$

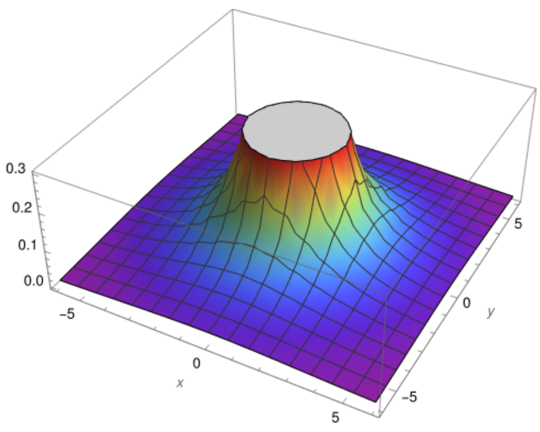
tedy

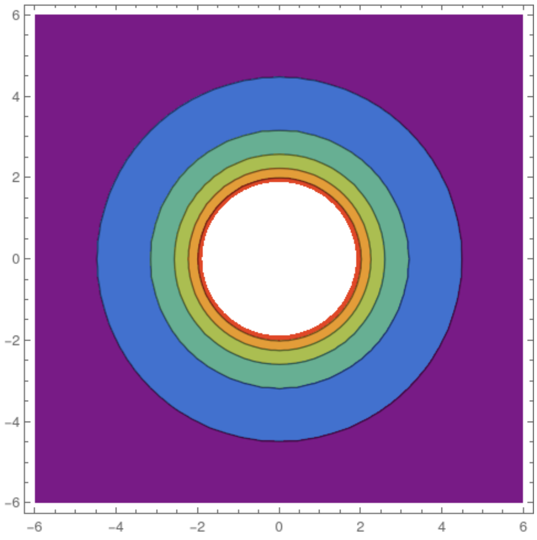
$$\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{1}{x^2+y^2} = \infty$$

(i) $\displaystyle\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{x^2+y^2}{x+y}$

Řešení: Spočteme limitu po přímce $y=x$. Dostáváme

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2+x^2}{x+x} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^2}{2x} = 0.$$

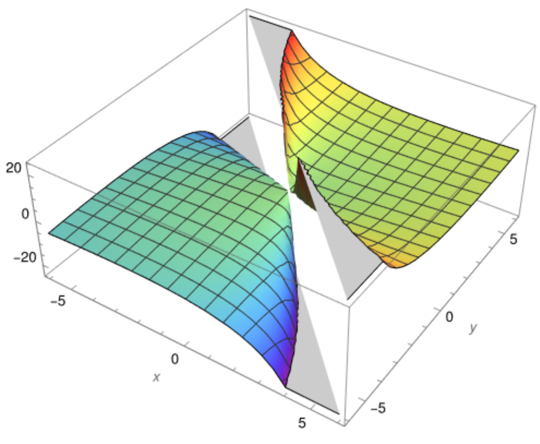


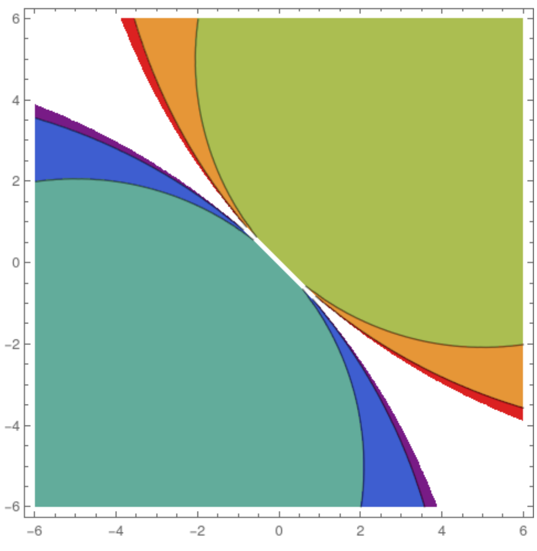


Ale pro křivku $y = -x + x^2$ máme

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 + (-x + x^2)^2}{x + (-x + x^2)} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 + x^2 - 2x^3 + x^4}{x^2} = \lim_{x \to 0} 2 - 2x + x^2 = 2.$$

Protože limita vyšla různě po různých křivkách, tak neexistuje.





(j) $\displaystyle \lim_{[x,y,z] \to [0,0,0]} \left(1 + \frac{2}{|x| + |y| + |z|}\right)^{|x|+|y|+|z|}$

Řešení:

Použijeme VOLSF.

Vnitřní funkce $|x| + |y| + |z|$, vnější $\left(1 + \frac{2}{t}\right)^t$.

$$\lim_{t \to 0} \left(1 + \frac{2}{t}\right)^t = \lim_{t \to 0} e^{t \log(1 + \frac{2}{t})} = e^0 = 1.$$

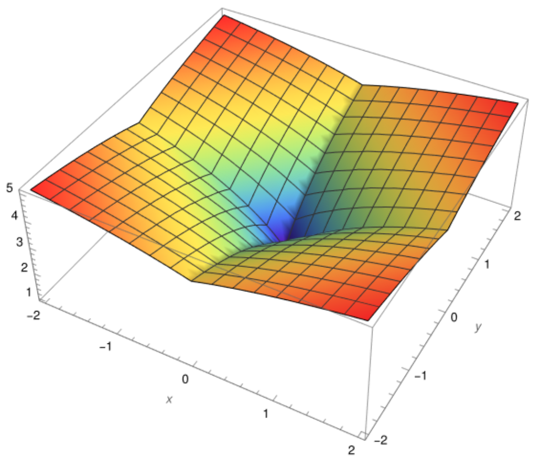
Tuto limitu spočteme pomocí l'Hospitala:

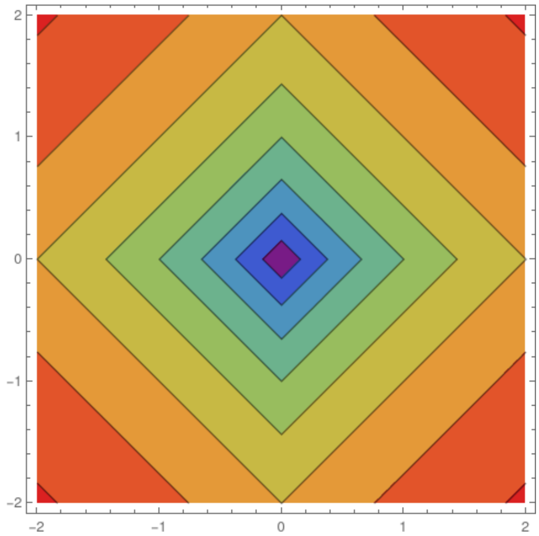
$$\lim_{t\to 0} t\log\left(1+\frac{2}{t}\right) = \lim_{t\to 0}\frac{\log\left(1+\frac{2}{t}\right)}{\frac{1}{t}} \underset{\text{něco}/\infty}{\overset{L'H}{=}} = \lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{\left(1+\frac{2}{t}\right)}\cdot\frac{-2}{t^2}}{\frac{-1}{t^2}} = \lim_{t\to 0} 2\frac{1}{\left(1+\frac{2}{t}\right)}$$
$$= \lim_{t\to 0}\frac{2t}{t+2} = 0$$

Podmínka (P): $|x|+|y|+|z| \neq 0$ na $B([0,0,0],1)\setminus\{[0,0,0]\}$.
Dohromady

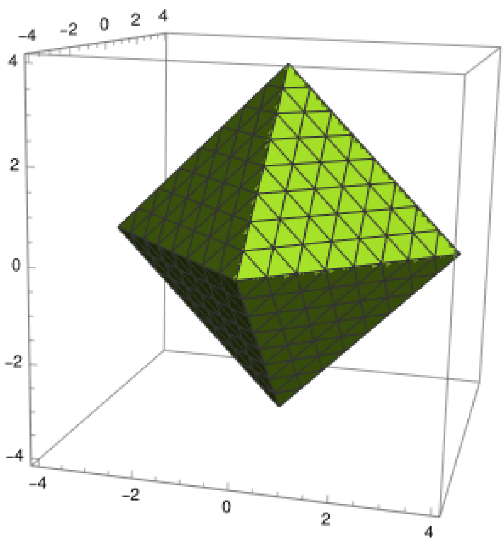
$$\lim_{[x,y,z]\to[0,0,0]}\left(1+\frac{2}{|x|+|y|+|z|}\right)^{|x|+|y|+|z|} = 1$$

Pro 2D by graf vypadal následovně





Vrstevnicové plochy



(k) $\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{xy^2}{x^2+y^6}$

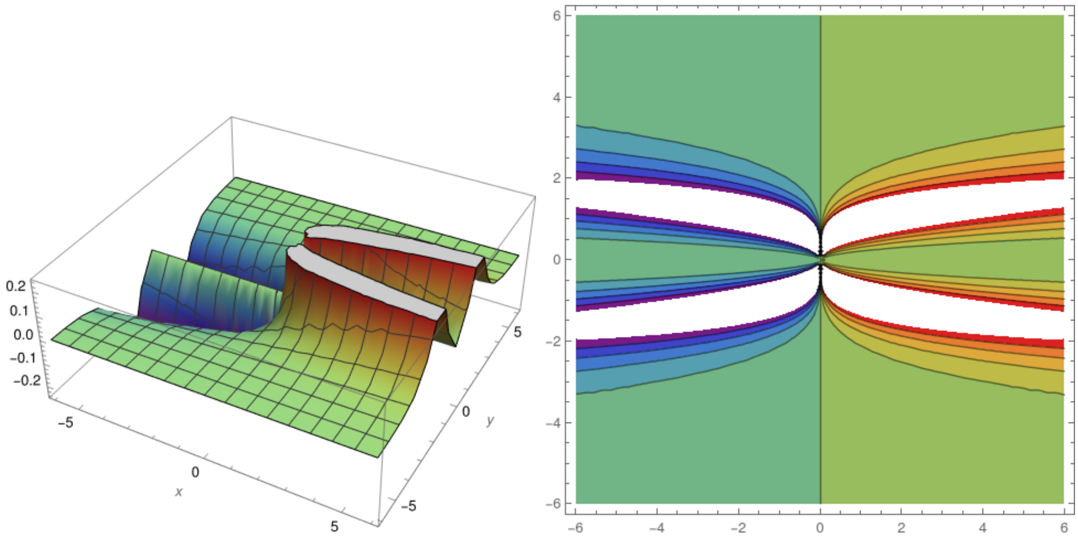
Řešení: Spočteme limitu po přímce $y = x$. Dostáváme

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\cdot x^2}{x^2+x^6} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{1+x^4} = 0.$$

Ale pro křivku $y = \sqrt[3]{x}$ máme

$$\lim_{x\to 0+} \frac{x\cdot x^{2/3}}{x^2+x^2} = \lim_{x\to 0+} \frac{x^{5/3}}{2x^2} = \lim_{x\to 0+} \frac{1}{2x^{1/3}} = \infty$$

Protože limita vyšla různě po různých křivkách, tak neexistuje.



(l) $\lim_{[x,y,z]\to[0,0,0]} \frac{x^2}{x^2+y^2+z^2}$

Řešení:

Otestujeme křivku $y = z = x$, máme

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2+x^2+x^2} = \frac{1}{3}.$$

Pro křivku $y = z = 0$, máme

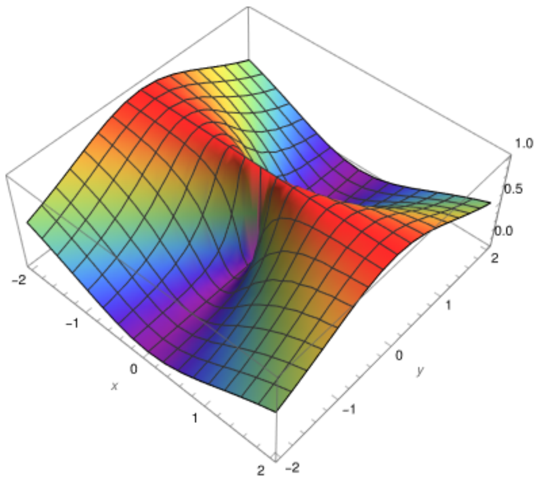
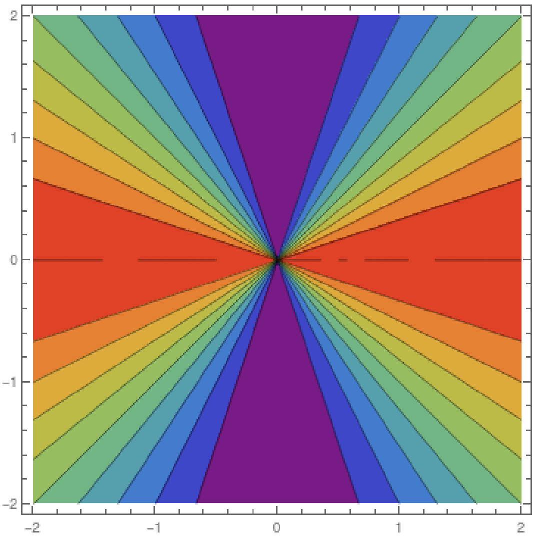
$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2+0^2+0^2} = 1.$$

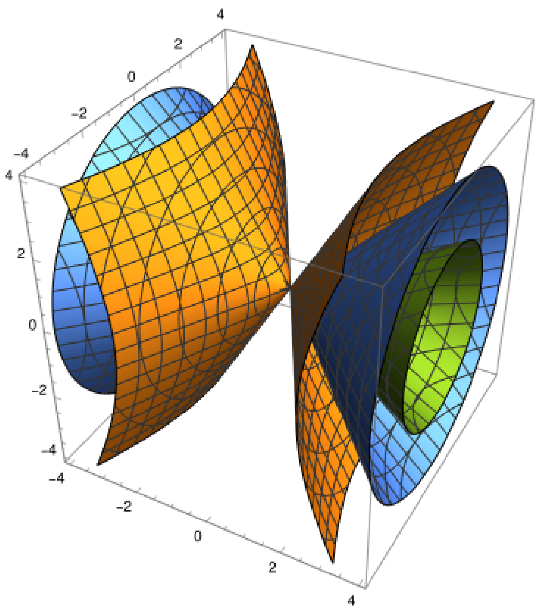
Tedy limita neexistuje.

Pro 2D (bez z^2) by graf vypadal následovně

Vrstevnicové plochy

(m) $\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{\sin xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$



Použijeme odhad $|\sin t| \le |t|$ a $2|xy| \le x^2 + y^2$. Pak máme

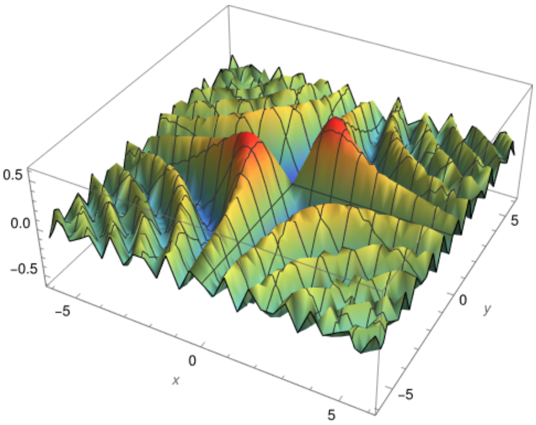
$$\left| \frac{\sin xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| \le \frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} \le \frac{x^2+y^2}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}.$$

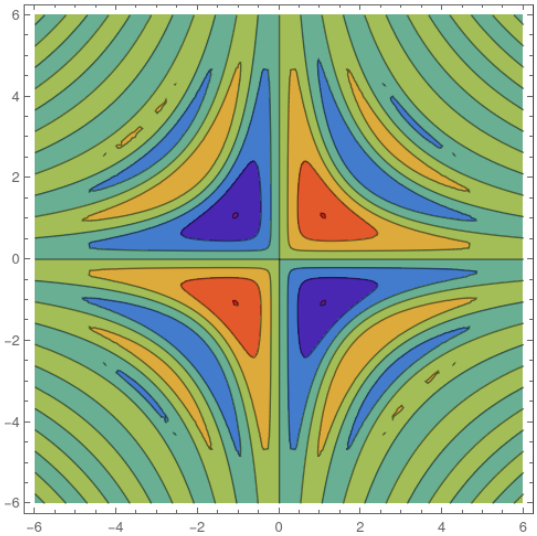
A protože ze spojitosti

$$\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2} = 0,$$

máme ze dvou policajtů i

$$\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{\sin xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$





(n) $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \dfrac{\sin xy}{x^2+y^2}$

Řešení:

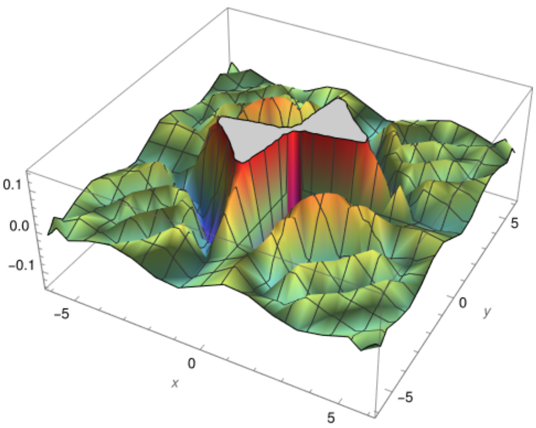
Otestujme přímky $y=0$ a $y=x$. Dostáváme

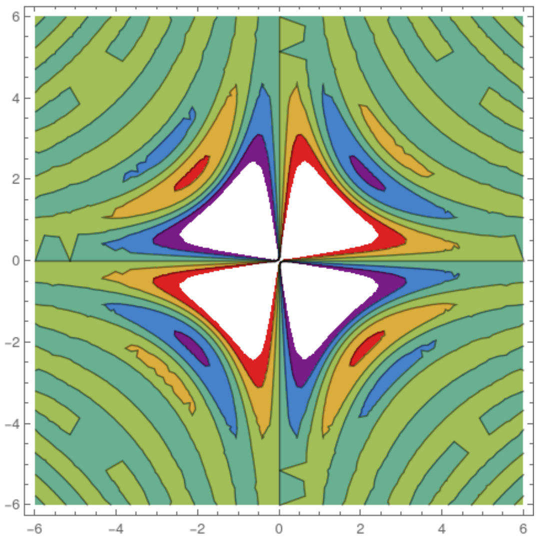
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x\cdot 0)}{x^2+0^2} = 0$$

a

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}.$$

Tedy limita neexistuje.





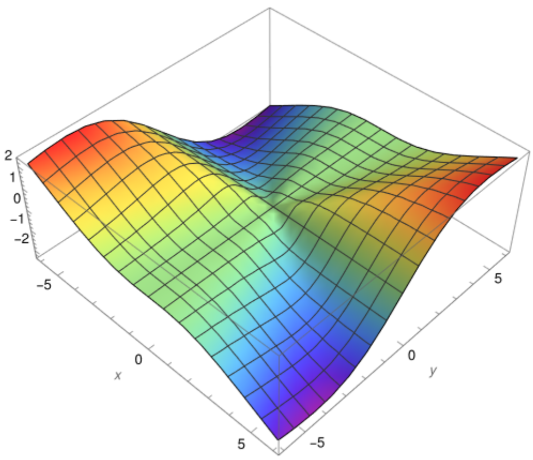
(o) $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \dfrac{x^3y}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}$

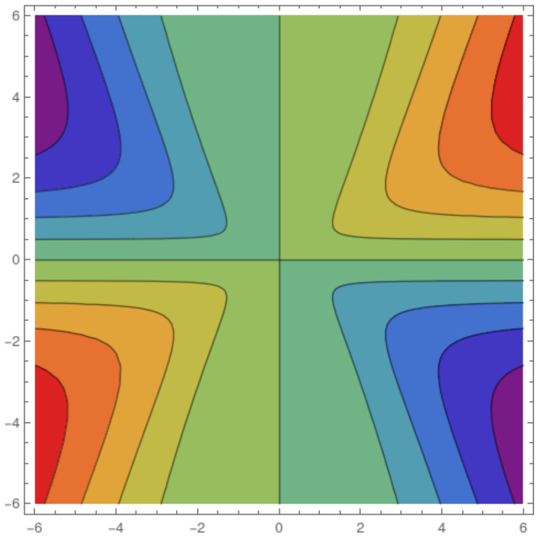
Řešení: Použijeme odhady

$$\frac{|x^3y|}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{x^2(x^2+y^2)}{2(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{(x^2+y^2)}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}.$$

Dostáváme

$$\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{x^3y}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$





(p) $\displaystyle\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{y^4-xy^2}{(x^4+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}$

Řešení: Otestujeme křivky $y=0$ a $y=x$. Dostaneme

$$\lim_{x\to 0} \frac{0^4 - x\cdot 0^2}{(x^4+0^2)\sqrt{x^2+0^2}} = 0$$

a

$$\lim_{x\to 0+} \frac{x^4 - x\cdot x^2}{(x^4+x^2)\sqrt{x^2+x^2}} = \lim_{x\to 0+} \frac{x^4-x^3}{(x^4+x^2)\sqrt{2x^2}} = \lim_{x\to 0+} \frac{x-1}{(x^2+1)\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}}.$$

Tedy limita neexistuje.

(q) $\displaystyle\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{x^2y(|x|+|y|)}{(x^4+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}$

Řešení:

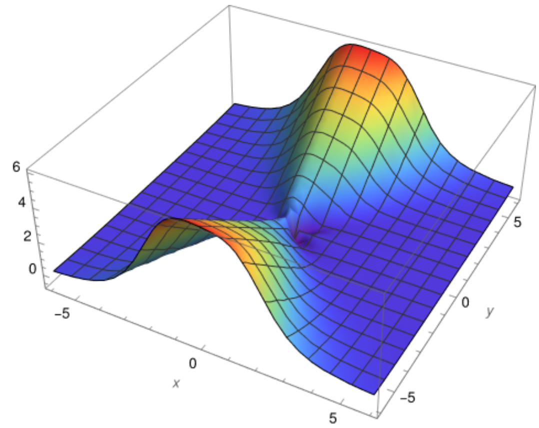
Otestujeme křivky $y=0$ a $y=x^2$. Máme

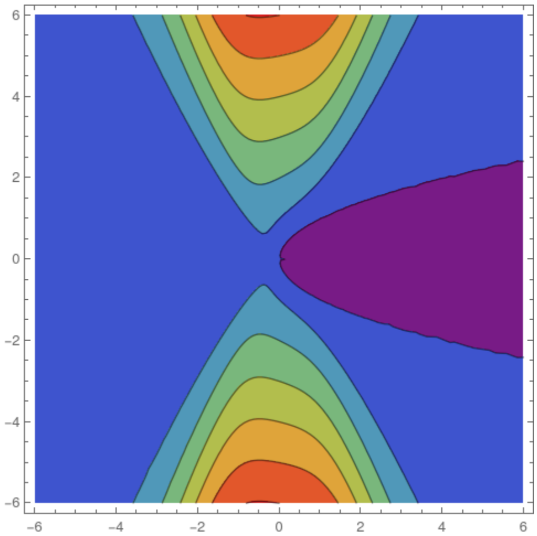
$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 0(|x|+|0|)}{(x^4+0^2)\sqrt{x^2+0^2}} = 0$$

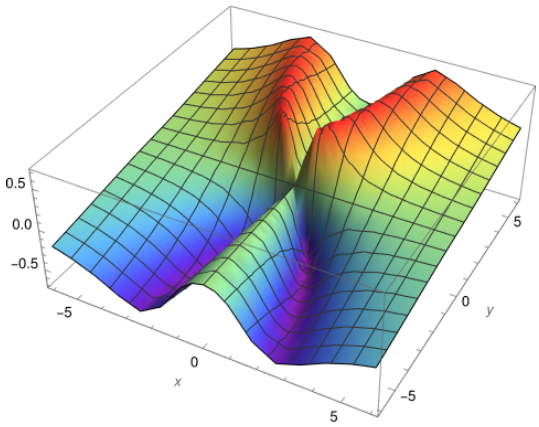
a

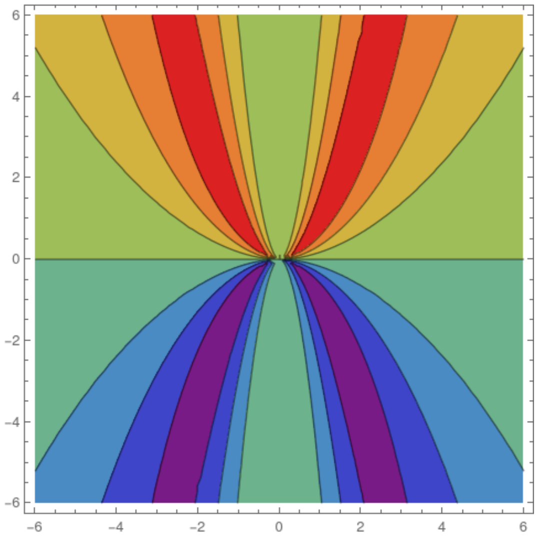
$$\lim_{x\to 0+} \frac{x^2x^2(|x|+|x^2|)}{(x^4+x^4)\sqrt{x^2+x^4}} = \lim_{x\to 0+} \frac{x+x^2}{2\sqrt{x^2+x^4}} = \lim_{x\to 0+} \frac{1+x}{2\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2}.$$

Tedy limita neexistuje.









5. Projděte si znovu sekci Shrnutí a Algoritmus. Zpracujte jej do nějakého (pro Vás) vhodného formátu. Např. Tabulka, Myšlenková mapa, Rozhodovací strom…