4. cvičení – Metrické prostory + funkce více proměnných

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

1

Definice 1. Řekneme, že metrický prostor (X, ρ) je *kompaktní*, jestliže z každé posloupnosti prvků X lze vybrat konvergentní podposloupnost.

Úloha 2. Pomocí definice ukažte, že interval $(0, 1]$ není kompakt.

Řešení: Uvažujme posloupnost $x_n = \frac{1}{n}$. Pak $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, ale 0 nepatří do zadaného intervalu. Navíc pro každou podposloupnost bude platit totéž. Což je spor s definicí.

Definice 3. Nechť (X, ρ) je metrický prostor, nechť $A, B \subset X$ jsou neprázdné množiny. *Vzdáleností množin A a B* rozumíme

$$\rho(A, B) = \inf\{\rho(x, y), x \in A, y \in B\}.$$

Úloha 4. Nechť (X, ρ) je metrický prostor, $A \subset X$ je neprázdná kompaktní množina, $B \subset X$ je neprázdná uzavřená množina. Dokažte, že je-li $A \cap B = \emptyset$, pak je $\rho(A, B) > 0$.

Řešení: Zdroj: https://is.muni.cz/th/fmhb8/bp.pdf

Pro spor předpokládejme, že

$$\rho(A, B) = \inf\{\rho(x, y), x \in A, y \in B\} = 0.$$

Tedy existuje posloupnost uspořádaných dvojic (x_n, y_n) taková, že $x_n \in A$, $y_n \in B$ a $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n) = 0$.

Zároveň lze říci, že a $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, B) = 0$.

Protože A je kompakt, lze z posloupnosti x_n vybrat konvergentní podposloupnost $x_{n_k} \to x$, kde $x \in K$.

Navíc platí, že $\rho(x, B) = 0$ (lze ukázat sporem). Pak ale $x \in \bar{B}$. Protože B je uzavřená, tak $\bar{B} = B$, tedy $x \in B$.

Tedy $x \in A \cap B$, což je spor.

Úloha 5. Najděte metrický prostor (X, ρ) a množiny $F, K \subset X$ takové, že F je uzavřená, K je kompaktní a zároveň neexistuje dvojice bodů $x \in K$ a $y \in F$ taková, že $\rho(F, K) = \rho(x, y)$. (Vzdálenosti F a K se „nenabývá“.)

Řešení: Zdroj: https://is.muni.cz/th/fmhb8/bp.pdf

Položme $X = \mathbb{Q}$ s ρ_2. Uvažujme množinu $F = \{(1 + \frac{1}{n})^n, n \in \mathbb{N}\}$. Platí, že posloupnost $x_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ je rostoucí a $\lim_{n\to\infty} x_n = e$. Množina F je uzavřená (nelze z ní vykonvergovat, protože jsme v prostoru $\mathbb{Q}$).

Dále položme $K = \{3\}$. Jednoprvková množina je zjevně kompaktní.

Pak

$$\rho(F, K) = \inf\{|3 - x|, x \in F\} = 3 - e.$$

Tedy infimum by se nabylo v bodě $e \notin F$, tedy jsme hotovi.

Definice 6. Nechť (X, ρ) je metrický prostor, $A \subset X$. *Průměrem* množiny A rozumíme číslo

$$\operatorname{diam} A = \begin{cases} 0, & A = \emptyset, \\ \sup\{\rho(x, y); x, y \in A\}, & A \neq \emptyset. \end{cases}$$

Úloha 7. Nechť (X, ρ) je kompaktní metrický prostor. Dokažte, že existují body $x, y \in X$ takové, že $\rho(x, y) = \operatorname{diam}(X)$.

Řešení: Zdroj: https://is.muni.cz/th/fmhb8/bp.pdf

Označme $d = \operatorname{diam}(X)$.

Z definice suprema existují posloupnosti x_n, y_n v X takové, že

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n) = d.$$

Protože X je kompakt, lze najít konvergentní podposloupnosti $x_{n_k} \to x$ a $y_{n_k} \to y$. Navíc platí

$$\lim_{k\to\infty} \rho(x_{n_k}, y_{n_k}) = d.$$

Pak ale $\rho(x, y) = d$:

Zvolme $\varepsilon > 0$. Pak existuje k_0 takové, že pro každé $k \geq k_0$ platí

$$\rho(x_{n_k}, x) < \varepsilon, \qquad \rho(y_{n_k}, y) < \varepsilon, \qquad \rho(x_{n_k}, y_{n_k}) < d + \varepsilon.$$

Pak

$$\rho(x, y) \leq \rho(x, x_{n_k}) + \rho(x_{n_k}, y_{n_k}) + \rho(y_{n_k}, y) < \varepsilon + d + \varepsilon + \varepsilon.$$

Definice 8. Množina $M \subset X$ se nazývá *omezená*, jestliže $\exists K \operatorname{diam}(M) < K$.

Věta 9. Nechť (X, ρ) je metrický prostor a $K \subset X$ je kompaktní. Potom K je omezená a uzavřená.

Poznámka 10. Označme l^∞ prostor všech omezených reálných posloupností $\{x_n\}$ a c_0 prostor všech (omezených) reálných posloupností s $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. Oba s metrikou

$$\rho_\infty(x, y) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n - y_n|.$$

Úloha 11. Uvažujte prostor l^∞. Ukažte, že c_0 není kompaktní podprostor l^∞.

Řešení: Zdroj: https://math.fme.vutbr.cz/download.aspx?id_file=755271223

Uvažujme posloupnosti x^k tvaru

$$x_n^k = \begin{cases} n, & k = n, \\ 0, & k \neq n. \end{cases}$$

Pak $\lim_{n\to\infty} x_n^k = 0$, tedy $\{x_n^k\} \in c_0$.

Zároveň pro konstantně nulovou posloupnost y máme

$$\rho(x^k, y) = k.$$

Tedy množina c_0 není v l^∞ omezená, tedy nemůže být kompaktní.

Poznámka 12. Kompaktní metrický prostor lze ekvivalentně definovat i takto:

Řekneme, že metrický prostor (X, ρ) je *kompaktní*, jestliže z každého otevřeného pokrytí lze vybrat konečné podpokrytí.

Neboli: Nechť $\{A_i, i \in I\}$ je systém otevřených množin v X takový, že $X \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i$. (systém může být spočetný, nespočetný...)

Pak existuje konečný systém $J \subset I$ tak, že $X \subseteq \bigcup_{i\in J} A_i$.

Úloha 13. 1. Ukažte, že průnik libovolného počtu kompaktních množin je kompaktní.

Řešení: Uvažujme $K = \bigcap_{i \in I} K_i$, kde K_i jsou kompaktní a I je systém indexů.
Platí, že každá kompaktní množina K_i je uzavřená. Dále platí, že průnik uzavřených množin je uzavřená množina, tedy K je uzavřená.
Zároveň $K \subset K_i$ pro všechna $i \in I$. Víme, že uzavřená podmnožina kompaktu je také kompakt. Tedy jsme hotovi.

2. Ukažte, že sjednocení konečného počtu kompaktních množin je kompaktní. Ukažte, že pro nekonečné sjednocení to nemusí platit.

Řešení: Uvažujme $K = K_1 \cup K_2 \cup \cdots \cup K_n$, kde K_i jsou kompaktní.
Dále nechť $\mathcal{G}$ je otevřené pokrytí K. Pak ale $\mathcal{G}$ je i otevřené pokrytí pro každé K_i. Tedy lze vybrat konečné podpokrytí $\mathcal{G}_i$.
Položme $\bar{\mathcal{G}} = \mathcal{G}_1 \cup \mathcal{G}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{G}_n$. Pak $\bar{\mathcal{G}}$ je konečné podpokrytí pro množinu K, tedy K je kompakt.
Nekonečné sjednocení: uvažujme $K_i = [-i, i]$ v prostoru $\mathbb{R}$. Pak K_i je kompaktní (z každé omezené posloupnosti totiž lze vybrat konvergentní podposloupnost), ale

$$\bigcup K_i = \mathbb{R},$$

což je neomezená množina, tedy není kompaktní.

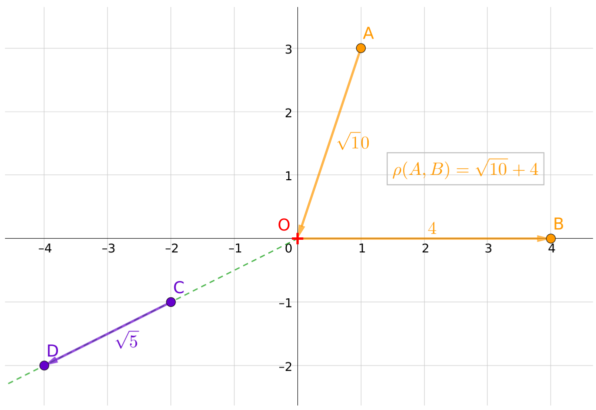
Věta 14 (Nutná podmínka kompaktnosti)**.** Nechť (X, ρ) je metrický prostor. Nechť existuje posloupnost $\{x_n\}$ prvků X a $\delta > 0$ taková, že

$$\forall m, n \in \mathbb{N}, n \neq m : \rho(x_m, x_n) \geq \delta.$$

Pak X není kompaktní.

Úloha 15. Pampeliškový prostor definujeme následovně.
Položme $X = \mathbb{R}^2$, pro prvky $A = [a_1, a_2]$, $B = [b_1, b_2]$ pak máme metriku

$$\rho(A, B) = \begin{cases} \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}, & A,\ B \text{ leží na stejném poloměru,} \\ \sqrt{a_1^2 + a_2^2} + \sqrt{b_1^2 + b_2^2}, & \text{jinak.} \end{cases}$$



Rozhodněte, zda v pampeliškovém metrickém prostoru platí, že každá omezená a uzavřená množina už je kompaktní.

Řešení: Zdroj: https://is.muni.cz/th/143424/fi_b/cd-priloha/skripta/mp/metricke-prostory-pro-obrazovku.pdf?so=nx

Uvažujme kružnici $x^2 + y^2 = 1$ (obyčejná kružnice z prostoru $\mathbb{R}^2$).

Pak pro každé dva body $a \neq b$ máme $\rho(a, b) = 1 + 1 = 2$.

Tedy máme (dokonce) nespočetně bodů z Věty 14 a prostor není kompaktní.

Úloha 16. Uvažujte jednotkovou kouli v prostoru l^∞. Ukažte, že přestože jde o omezenou množinu, tak není kompaktní.

Řešení: Zdroj: https://math.fme.vutbr.cz/download.aspx?id_file=755271223

Jednotková koule je omezená množina (každá koule je z definice omezená množina).

Ukážeme, že není kompaktní. Uvažujme posloupnosti e_n, $n \in \mathbb{N}$, tedy posloupnosti, které mají právě na jednom místě 1, jinak obsahují samé 0. Pak pro $n \neq m$ máme

$$\rho(e_n, e_m) = 1.$$

Tedy z Věty 14 jednotková koule nemůže být kompaktní.

Věta 17 (Kompaktnost v $\mathbb{R}^n$)**.** *Nechť $K \subset \mathbb{R}^n$. Pak K je kompaktní právě tehdy, když je omezená a uzavřená.*

Poznámka 18. (Podle https://www.physics.muni.cz/~tomtyc/teorfyzzaj/fraktaly_chaos-MSarbort.pdf.)

Cantorovým diskontinuem rozumíme množinu vzniklou následujícím postupem:

1. Označme $C_0 = [0, 1]$.
2. Z této množiny „vyndáme prostřední třetinu" - interval $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. Zbylou množinu označme C_1, tedy $C_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$.
3. Z intervalů množiny C_1 opět vyjmeme prostřední třetiny. Získáme množinu $C_2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$.
4. Postup iterujeme, vyndaváme další třetiny a definujeme množiny C_n.
5. Cantorovo diskontinuum je pak definováno jako $CD = \bigcap\limits_n C_n$.

https://cs.wikipedia.org/wiki/Cantorovo_diskontinuum

Úloha 19. Ukažte, že Cantorovo diskontinuum je kompaktní množina.

Řešení: Protože jsme na $\mathbb{R}$, tak stačí ukázat, že CD je omezená a uzavřená množina. Máme $CD \subset [0, 1]$, tedy je omezená.

Dále $CD = \bigcap_n C_n$, tedy je průnikem uzavřených množin, tedy je uzavřená.

Tedy Cantorovo diskontinuum je kompakt.

2

Poznámka 20. Funkce $f(x,y)=x$ a $f(x,y)=y$ jsou spojité na $\mathbb{R}^2$. Obecně spojitost funkcí na $\mathbb{R}^n$ je zachována aritmetickými operacemi (krom dělení 0) i skládáním.

Úloha 21. Pečlivě zdůvodněte, že následující funkce jsou spojité (na svém D_f):

1. $\arctan(x^2+y^2)$
   Řešení: Funkce $f(x,y)=x$ a $f(x,y)=y$ jsou spojité (vizte poznámku). Jejich součiny jsou také spojité, tedy máme spojitost , x^2 a y^2. Součet spojitých funkcí je také spojitý. Funkce $f(z)=\arctan z$ je také spojitá a tedy složení funkcí $\arctan x^2+y^2$ je také spojité na $\mathbb{R}^2$.
2. $\sin\dfrac{xy}{x^2-y^3}$
   Řešení: Funkce $f(x,y)=x$ a $f(x,y)=y$ jsou spojité (vizte poznámku). Jejich součiny jsou také spojité, tedy máme spojitost xy, x^2 a y^3. Rozdíl a podíl spojitých funkcí (pakliže nedělíme 0) je také spojitý, máme tedy spojitost funkce $\frac{xy}{x^2-y^3}$ na množině $[x,y]\in\mathbb{R}^2 : x^2\neq y^3$. Funkce $f(z)=\sin z$ je také spojitá a tedy složení funkcí $\sin\frac{xy}{x^2-y^3}$ je také spojité na $\{[x,y]\in\mathbb{R}^2 : x^2\neq y^3\}$.
3. $\log(e^{|x^2-y^2|}+1)$
   Řešení: Analogicky. Spojitá na $\mathbb{R}^2$.
4. $(x+y)^{xy}$
   Řešení: Přepíšeme jako $e^{xy\log(x+y)}$. Definičním oborem pak je $\{[x,y]\in\mathbb{R}^2 : x+y>0\}$. Pak už postupujeme analogicky.

Úloha 22. Nechť $f(x)=x^2$. Najděte vzory množin:

1. $\{4\}$
   Řešení: Z grafu: $\{-2,2\}$
2. $(0,9)$
   Řešení: $(-3,0)\cup(0,3)$
3. $[0,9)$
   Řešení: $(-3,3)$
4. $[1,9]$
   Řešení: $[-3,-1]\cup[1,3]$
5. $(-2,\infty)$
   Řešení: $\mathbb{R}$
6. $\{-4\}$
   Řešení: $\emptyset$

Úloha 23. Nechť $f(x)=\sin x$. Najděte vzory množin:

1. $\{1\}$
   Řešení: $\{\frac{\pi}{2}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$
2. $(-1,1)$
   Řešení: $\mathbb{R}\setminus\{\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$

3. $[0,1)$
   Řešení: Položme $A := \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}[0+2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi)$, $B := \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}(\frac{\pi}{2}+2k\pi, \pi+2k\pi]$. Vzorem je pak množina $A\cup B$.
4. $(-2,-1]$
   Řešení: $\{-\frac{\pi}{2}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$
5. $(-\infty,-3]$
   Řešení: $\emptyset$

Poznámka 24. Nechť (X,ρ) a (Y,σ) jsou metrické prostory a $f : X \to Y$ je spojité zobrazení. Pak pro otevřenou množinu G v (Y,σ) je $f^{-1}(G)$ otevřená v (X,ρ) a pro uzavřenou množinu F v (Y,σ) je $f^{-1}(F)$ uzavřená v (X,ρ).

Úloha 25. Určete, zda jsou následující množiny otevřené nebo uzavřené a pečlivě zdůvodněte:

1. $\{[x,y]\in\mathbb{R}^2 : x^2-y^3\le 2\}$
   Řešení: Definujme funkci $f(x,y) = x^2-y^3$. Funkce je spojitá (násobení a rozdíl spojitých). Dále uvažujme interval $(-\infty,2]$, který je uzavřený. Množina pak je rovna $f^{-1}((-\infty,2])$, tedy vzoru uzavřeného intervalu při spojitém zobrazení. Tedy je uzavřená.
2. $\{[x,y]\in\mathbb{R}^2 : \arctan(x^2+y^2) > 1\}$
   Řešení: $f(x,y) = \arctan(x^2+y^2)$, interval $I = (1,\infty)$ je otevřená množina. Tedy $f^{-1}(I)$ je otevřená.
3. $\{[x,y]\in\mathbb{R}^2 : -3 < e^{|x^2-y^2|} < 2\}$
   Řešení: $f(x,y) = e^{|x^2-y^2|}$, interval $I = (-3,2)$ je otevřená množina. Tedy $f^{-1}(I)$ je otevřená.
4. $\{[x,y]\in\mathbb{R}^2 : 0\le x\le 1, -3\le y\le 3, x+y\le 2\}$
   Řešení: $f(x,y) = x+y$, interval $I = (-\infty,2]$ je uzavřená množina. Tedy $f^{-1}(I)$ je uzavřená.
   Dále $g(x,y) = x$, interval $J = [0,1]$ je uzavřená množina. Tedy $g^{-1}(J)$ je uzavřená.
   Dále $h(x,y) = y$, interval $K = [-3,3]$ je uzavřená množina. Tedy $h^{-1}(K)$ je uzavřená.
   Dohromady: průnik 3 uzavřených je uzavřená.

Úloha 26. Určete, zda jsou následující množiny omezené:

1. $\{[x,y]\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < 3\}$
   Řešení: Ano, přímo z definice se vejde do koule $B(0,\sqrt{3})$.
2. $\{[x,y]\in\mathbb{R}^2 : \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y} < 10\}$
   Řešení: Ne. Uvažujme např. množinu: $y=1$ a $x>1$.
3. $\{[x,y]\in\mathbb{R}^2 : x^2+2y^2\le 1\}$
   Řešení: Ano, neb $x^2+y^2\le x^2+2y^2\le 1$.
4. $\{[x,y]\in\mathbb{R}^2 : \sin(xy)\le 1\}$
   Řešení: Ne, nerovnost je splněna pro celou rovinu.
5. $\{[x,y]\in\mathbb{R}^2 : x^6+y^6 < 2\}$
   Řešení: Ano, platí $|x|<2$ a $|y|<2$, což je čtverec, který je jistě omezená množina.

6. $\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : \dfrac{xy}{x^2+y^2} < \dfrac{1}{2}\}$
Řešení: Ne. Máme $2xy \leq x^2+y^2$ tedy $0 \leq^2 -2xy+y^2$, což je $0 \leq (x-y)^2$. Tedy nerovnici splňuje celá rovina krom přímky $x=y$. Tedy nejde o omezenou množinu.

3

Úloha 27. Určete definiční obor a načrtněte (příklady ze zkoušek)

1. $f(x,y) = \arcsin(x+y) + \arctan(x+y) + xy$
Řešení:
Kvůli definičnímu oboru funkce arcsin potřebujeme

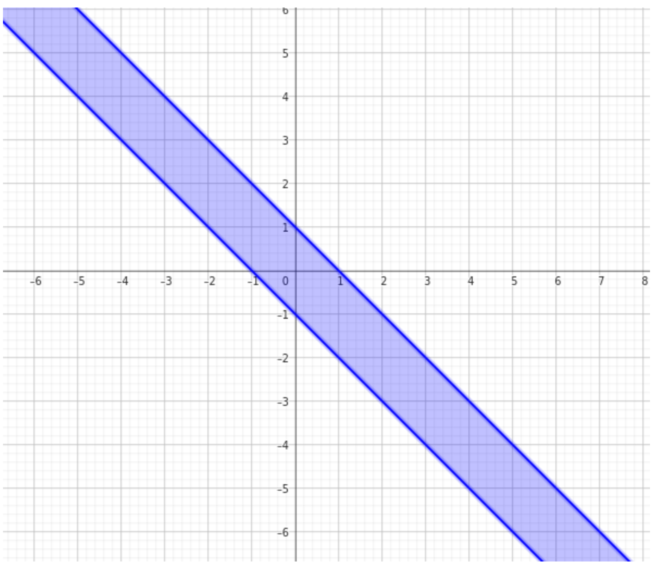
$$-1 \leq x+y \leq 1$$

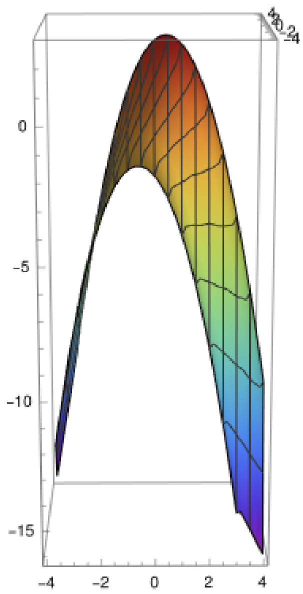
tedy

$$y \leq 1-x, \qquad -1-x \leq y.$$

Závěr:

$$D_f = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : y \leq 1-x,\ -1-x \leq y.\}$$





2. $f(x,y) = \log\left(\dfrac{x}{|x|-|y|}\right)$
Řešení: Máme podmínky

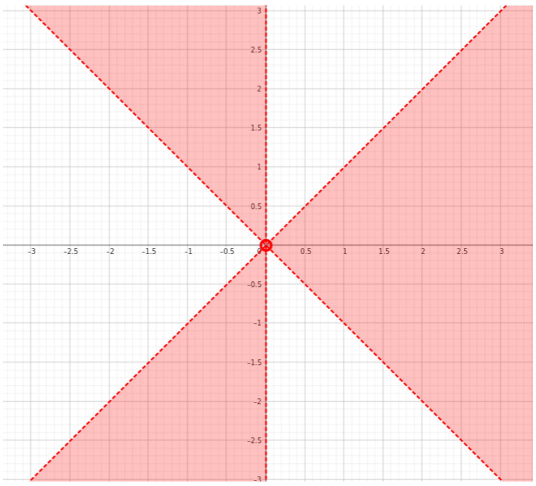
$$x \neq 0, \qquad |x| \neq |y|, \qquad \frac{x}{|x|-|y|} > 0$$

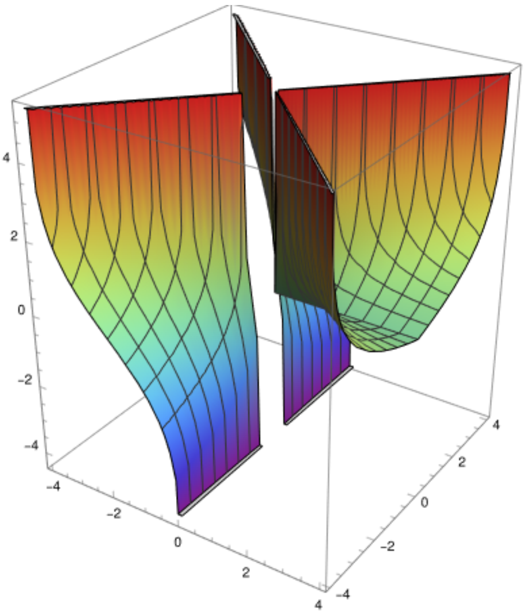
Tedy získáme nerovnice

$$(x > 0 \ \wedge \ |x| - |y| > 0) \ \vee \ (x < 0 \ \wedge \ |x| - |y| < 0).$$

Závěr:

$$D_f = \left\{ [x, y] \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0, |x| \neq |y|, \frac{x}{|x| - |y|} > 0 \right\}$$





3. $f(x, y) = \sqrt{xy - y^3 + 2y^2}$
Řešení: Podmínky:

$$y(x - y^2 + 2y) \geq 0$$

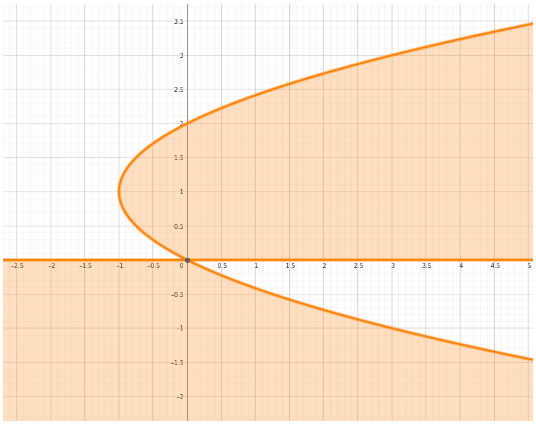
Tedy

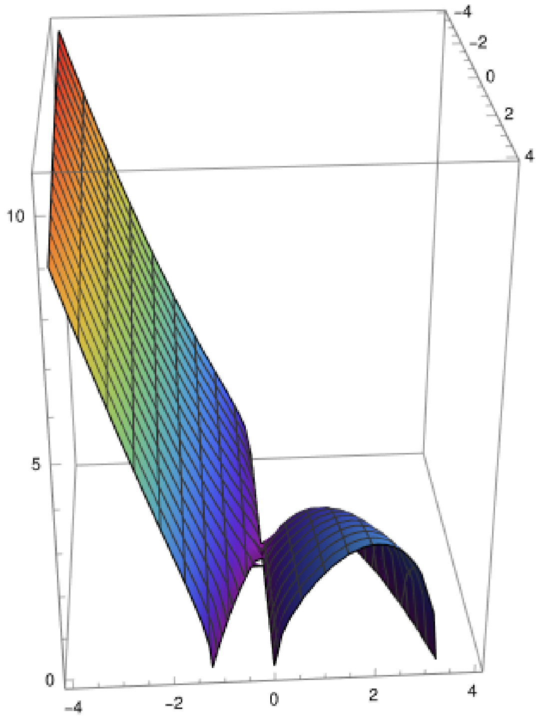
- $y = 0,\ x \in \mathbb{R}$, nebo
- $x = y^2 - 2y$, nebo
- $x \geq y^2 - 2y \ \wedge \ y \geq 0$, nebo
- $x \leq y^2 - 2y \ \wedge \ y \leq 0$.

Navíc lze upravit $y^2 - 2y = (y - 1)^2 - 1$.
Závěr:

$$D_f = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : y(x - y^2 + 2y) \geq 0\}$$

3





4. $f(x, y) = \arcsin \sqrt{x(x+y)}$

   Řešení: Podmínky
$$0 \leq x(x+y) \leq 1$$
   Tedy
   - $x \geq 0 \ \wedge \ y \geq -x$, nebo
   - $x \leq 0 \ \wedge \ y \leq -x$, nebo
   - $x = 0$, $y \in \mathbb{R}$, nebo
   - $y = -x$.

   Zároveň musí být splněno
$$\begin{aligned} x(x+y) &\leq 1 \\ x^2 + xy &\leq 1 \\ xy &\leq 1 - x^2 \end{aligned}$$
   Tedy
   - $x = 0$, $y \in \mathbb{R}$, nebo
   - $x > 0 \ \wedge \ y \leq \frac{1}{x} - x$, nebo
   - $x < 0 \ \wedge \ y \geq \frac{1}{x} - x$.

   Závěr:
$$D_f = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x(x+y) \leq 1\}$$