4. cvičení – Metrické prostory + funkce více proměnných

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

1

Definice 1. Řekneme, že metrický prostor (X, ρ) je *kompaktní*, jestliže z každé posloupnosti prvků X lze vybrat konvergentní podposloupnost.

Úloha 2. Pomocí definice ukažte, že interval $(0, 1]$ není kompakt.

Definice 3. Nechť (X, ρ) je metrický prostor, nechť $A, B \subset X$ jsou neprázdné množiny. *Vzdáleností množin A a B* rozumíme

$$\rho(A, B) = \inf\{\rho(x, y), x \in A, y \in B\}.$$

Úloha 4. Nechť (X, ρ) je metrický prostor, $A \subset X$ je neprázdná kompaktní množina, $B \subset X$ je neprázdná uzavřená množina. Dokažte, že je-li $A \cap B = \emptyset$, pak je $\rho(A, B) > 0$.

Úloha 5. Najděte metrický prostor (X, ρ) a množiny $F, K \subset X$ takové, že F je uzavřená, K je kompaktní a zároveň neexistuje dvojice bodů $x \in K$ a $y \in F$ taková, že $\rho(F, K) = \rho(x, y)$. (Vzdálenosti F a K se „nenabývá“.)

Definice 6. Nechť (X, ρ) je metrický prostor, $A \subset X$. *Průměrem* množiny A rozumíme číslo

$$\operatorname{diam} A = \begin{cases} 0, & A = \emptyset, \\ \sup\{\rho(x, y); x, y \in A\}, & A \neq \emptyset. \end{cases}$$

Úloha 7. Nechť (X, ρ) je kompaktní metrický prostor. Dokažte, že existují body $x, y \in X$ takové, že $\rho(x, y) = \operatorname{diam}(X)$.

Definice 8. Množina $M \subset X$ se nazývá *omezená*, jestliže $\exists K \operatorname{diam}(M) < K$.

Věta 9. Nechť (X, ρ) je metrický prostor a $K \subset X$ je kompaktní. Potom K je omezená a uzavřená.

Poznámka 10. Označme l^∞ prostor všech omezených reálných posloupností $\{x_n\}$ a c_0 prostor všech (omezených) reálných posloupností s $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. Oba s metrikou

$$\rho_\infty(x, y) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n - y_n|.$$

Úloha 11. Uvažujte prostor l^∞. Ukažte, že c_0 není kompaktní podprostor l^∞.

Poznámka 12. Kompaktní metrický prostor lze ekvivalentně definovat i takto:

Řekneme, že metrický prostor (X, ρ) je *kompaktní*, jestliže z každého otevřeného pokrytí lze vybrat konečné podpokrytí.

Neboli: Nechť $\{A_i, i \in I\}$ je systém otevřených množin v X takový, že $X \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$. (systém může být spočetný, nespočetný…)

Pak existuje konečný systém $J \subset I$ tak, že $X \subseteq \bigcup_{i \in J} A_i$.

Úloha 13. 1. Ukažte, že průnik libovolného počtu kompaktních množin je kompaktní.

2. Ukažte, že sjednocení konečného počtu kompaktních množin je kompaktní. Ukažte, že pro nekonečné sjednocení to nemusí platit.

Věta 14 (Nutná podmínka kompaktnosti)**.** Nechť (X, ρ) je metrický prostor. Nechť existuje posloupnost $\{x_n\}$ prvků X a $\delta > 0$ taková, že

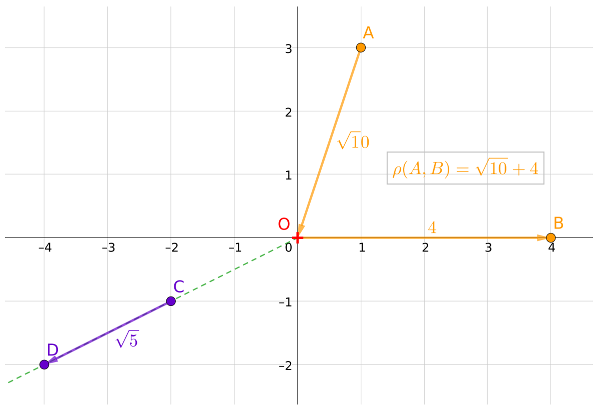
$$\forall m, n \in \mathbb{N}, n \neq m : \rho(x_m, x_n) \geq \delta.$$

Pak X není kompaktní.

Úloha 15. Pampeliškový prostor definujeme následovně.

Položme $X = \mathbb{R}^2$, pro prvky $A = [a_1, a_2]$, $B = [b_1, b_2]$ pak máme metriku

$$\rho(A, B) = \begin{cases} \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}, & A, B \text{ leží na stejném poloměru,} \\ \sqrt{a_1^2 + a_2^2} + \sqrt{b_1^2 + b_2^2}, & \text{jinak.} \end{cases}$$



Rozhodněte, zda v pampeliškovém metrickém prostoru platí, že každá omezená a uzavřená množina už je kompaktní.

Úloha 16. Uvažujte jednotkovou kouli v prostoru l^∞. Ukažte, že přestože jde o omezenou množinu, tak není kompaktní.

Věta 17 (Kompaktnost v $\mathbb{R}^n$)**.** Nechť $K \subset \mathbb{R}^n$. Pak K je kompaktní právě tehdy, když je omezená a uzavřená.

Poznámka 18. (Podle `https://www.physics.muni.cz/~tomtyc/teorfyzzaj/fraktaly_chaos-MSarbort.pdf`.)

Cantorovým diskontinuem rozumíme množinu vzniklou následujícím postupem:

1. Označme $C_0 = [0, 1]$.
2. Z této množiny „vyndáme prostřední třetinu“ - interval $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. Zbylou množinu označme C_1, tedy $C_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$.
3. Z intervalů množiny C_1 opět vyjmeme prostřední třetiny. Získáme množinu $C_2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$.
4. Postup iterujeme, vyndaváme další třetiny a definujeme množiny C_n.
5. Cantorovo diskontinuum je pak definováno jako $CD = \bigcap\limits_n C_n$.

Úloha 19. Ukažte, že Cantorovo diskontinuum je kompaktní množina.

2

https://cs.wikipedia.org/wiki/Cantorovo_diskontinuum

2

Poznámka 20. Funkce $f(x,y) = x$ a $f(x,y) = y$ jsou spojité na $\mathbb{R}^2$. Obecně spojitost funkcí na $\mathbb{R}^n$ je zachována aritmetickými operacemi (krom dělení 0) i skládáním.

Úloha 21. Pečlivě zdůvodněte, že následující funkce jsou spojité (na svém D_f):

1. $\arctan(x^2 + y^2)$
2. $\sin \dfrac{xy}{x^2 - y^3}$
3. $\log(e^{|x^2 - y^2|} + 1)$
4. $(x + y)^{xy}$

Úloha 22. Nechť $f(x) = x^2$. Najděte vzory množin:

1. $\{4\}$
2. $(0, 9)$
3. $[0, 9)$
4. $[1, 9]$
5. $(-2, \infty)$
6. $\{-4\}$

Úloha 23. Nechť $f(x) = \sin x$. Najděte vzory množin:

1. $\{1\}$
2. $(-1, 1)$
3. $[0, 1)$
4. $(-2, -1]$
5. $(-\infty, -3]$

Poznámka 24. Nechť (X, ρ) a (Y, σ) jsou metrické prostory a $f : X \to Y$ je spojité zobrazení. Pak pro otevřenou množinu G v (Y, σ) je $f^{-1}(G)$ otevřená v (X, ρ) a pro uzavřenou množinu F v (Y, σ) je $f^{-1}(F)$ uzavřená v (X, ρ).

Úloha 25. Určete, zda jsou následující množiny otevřené nebo uzavřené a pečlivě zdůvodněte:

1. $\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^3 \leq 2\}$
2. $\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : \arctan(x^2 + y^2) > 1\}$
3. $\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : -3 < e^{|x^2 - y^2|} < 2\}$
4. $\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, -3 \leq y \leq 3, x + y \leq 2\}$

Úloha 26. Určete, zda jsou následující množiny omezené:

1. $\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 3\}$
2. $\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y} < 10\}$
3. $\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2y^2 \leq 1\}$
4. $\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : \sin(xy) \leq 1\}$
5. $\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x^6 + y^6 < 2\}$
6. $\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : \dfrac{xy}{x^2 + y^2} < \dfrac{1}{2}\}$

3

Úloha 27. Určete definiční obor a načrtněte (příklady ze zkoušek)

1. $f(x, y) = \arcsin(x + y) + \arctan(x + y) + xy$
2. $f(x, y) = \log\left(\dfrac{x}{|x| - |y|}\right)$
3. $f(x, y) = \sqrt{xy - y^3 + 2y^2}$
4. $f(x, y) = \arcsin\sqrt{x(x + y)}$