

3. cvičení – Metrické prostory

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

1

Definice 1. *Metrickým prostorem* budeme rozumět dvojici (X, ρ) , kde X je množina, $\rho : X \times X \rightarrow [0, \infty)$ je funkce splňující

- (1) $\forall x, y \in X : \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,
- (2) $\forall x, y \in X : \rho(x, y) = \rho(y, x)$,
- (3) $\forall x, y, z \in X : \rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$.

Funkci ρ nazýváme *metrika na X* .

Poznámka 2. Množinu \mathbb{R}^n uvažujeme s metrikami

$$\rho_\infty(x, y) = \max_{i=1, \dots, n} |x_i - y_i|, \quad \rho_1(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|, \quad \rho_2(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2}, \quad x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Úloha 3. Určete, zda jsou následující objekty metrickým prostorem:

1. Na prostoru $\mathbb{C}([0, 2])$ spojitých funkcí na $[0, 2]$ uvažujme

$$\rho(f, g) = |f(1) - g(1)|.$$

Řešení: Nesplňuje 1. podmínku, funkce $f = x$ a $g = x^2$ mají nulovou vzdálenost, ale nejsou totožné. Tzv. *pseudometrika*.

2. Na \mathbb{R} uvažujme

$$\rho(x, y) = \begin{cases} x - y, & x \geq y, \\ 1, & x < y. \end{cases}$$

Řešení: Nesplňuje symetrii. Tzv. *kvazimetrika*.

3. Prostor \mathbb{R}^2 s funkcí $\rho(x, y) = \rho_2(x, x_0) + \rho_2(x_0, y)$, kde x_0 značí počátek $(0, 0)$. Jedná se tedy o strukturu, kde při měření vzdálenosti dvou bodů musíme vždy projít počátkem.

Řešení: Ano, jedná se o metriku.

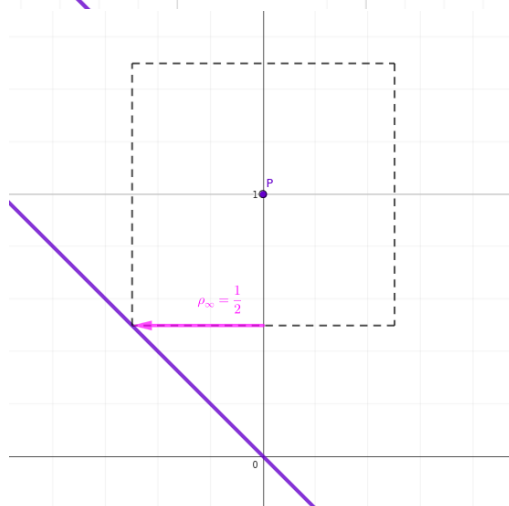
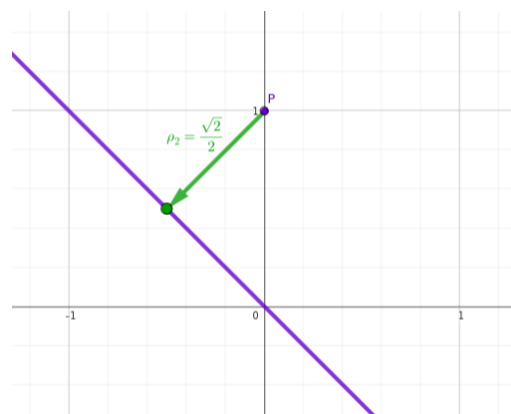
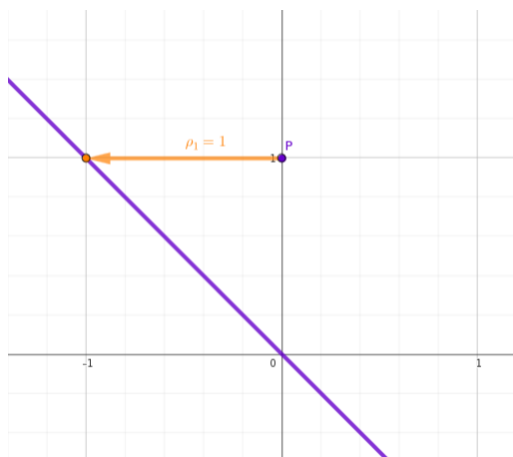
4. Taxi: Vzdálenost dvou míst v Praze měříme jako nejkratší možnou dráhu ujetou autem.

Řešení: Není symetrická - kvůli jednosměrkám.

Definice 4. Nechť (X, ρ) je metrický prostor, $A \subset X$, $A \neq \emptyset$, a $x \in X$. *Vzdáleností bodu x od množiny A* rozumíme číslo

$$\rho(x, A) = \inf\{\rho(x, y); y \in A\}.$$

Úloha 5. Na \mathbb{R}^2 najděte vzdálenost bodu $P = [0, 1]$ od přímky $y = -x$ v metrice

1. ρ_1 2. ρ_2 3. ρ_∞ **Řešení:**

Zdroj: https://is.muni.cz/th/143424/fi_b/cd-priloha/skripta/mp/metricke-prostory-pro-obrazovku.pdf?so=nx

Úloha 6. V prostoru $\mathbb{C}([0, 1])$ uvažujeme supremovou metriku

$$\rho_\infty(f, g) = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x) - g(x)|.$$

Najděte nejmenší vzdálenost funkce $f(x) = x$ od podprostoru tvořeného konstantními funkcemi.

Řešení: Uvažujme konstantní funkci $g(x) = k$. Pak

$$\rho_\infty(f, g) = \sup_{x \in [0, 1]} |x - k|.$$

Nejmenší hodnoty dosáhneme pro $k = \frac{1}{2}$, pak $\rho_\infty(f, g) = \frac{1}{2}$.

Hejblátko v geogebra: <https://www.geogebra.org/calculator/veyfkghz>

Zdroj: <https://is.muni.cz/th/fmhb8/bp.pdf>

Poznámka 7. Necht' $p \in [1, \infty)$ a l_p je množina všech reálných posloupností $\{x_n\}$, pro něž řada $\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p$ konverguje. Pak definujeme metriku

$$\rho_p(x, y) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |x_n - y_n|^p \right)^{1/p}.$$

Poznámka 8. Uvažujme množinu všech omezených reálných posloupností $\{x_n\}$ Pak definujeme metriku

$$\rho_{\infty}(x, y) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n - y_n|.$$

Úloha 9. Určete vzdálenost posloupnosti $x = \{1, 2, \frac{1}{3^2}, \frac{1}{4^2}, \dots, \frac{1}{n^2}, \dots\}$ od množiny $M = \{x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} : x_1 = x_2\}$ v prostorech

1. l_1
2. l_2
3. l_{∞}

Zdroj: <https://is.muni.cz/th/fmhb8/bp.pdf>

Řešení:

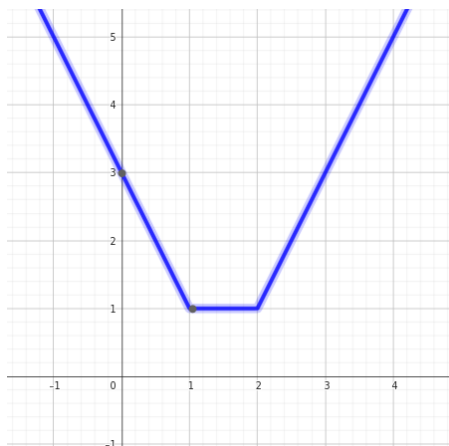
1. Uvažujme posloupnost $y = \{y_1, y_1, y_3, y_4 \dots\}$. Pak

$$\rho_1(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} |x_n - y_n|.$$

Tato $\rho_1(x, y)$ bude nejmenší v situaci, kdy $x_n = y_n$ pro $n \geq 3$. Pak

$$\rho_1(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + 0 + 0 + \dots = |1 - y_1| + |2 - y_1|.$$

Tedy hledáme minimum funkce $f(y_1) = |1 - y_1| + |2 - y_1|$. Z grafu získáme minimum (např.) v bodě $y_1 = 1$ a hodnotu $\rho_1(x, y) = |1 - 1| + |2 - 1| = 1$.



2. Analogicky. Uvažujme posloupnost $y = \{y_1, y_1, y_3, y_4 \dots\}$. Pak

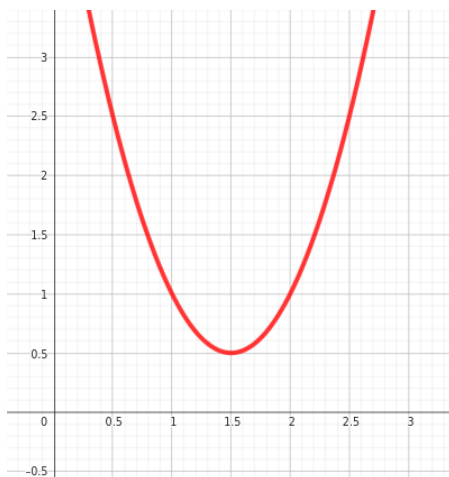
$$\rho_2(x, y) = \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} (x_n - y_n)^2}.$$

Tato $\rho_2(x, y)$ bude nejmenší v situaci, kdy $x_n = y_n$ pro $n \geq 3$. Pak

$$\rho_2(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 + y_2)^2 + 0 + 0 + \dots} = \sqrt{(1 - y_1)^2 + (2 - y_1)^2}.$$

Tedy hledáme minimum funkce $f(y_1) = \sqrt{(1 - y_1)^2 + (2 - y_1)^2}$. Stačí najít minimum funkce $g(y_1) = (1 - y_1)^2 + (2 - y_1)^2$.

Zderivováním získáme minimum v bodě $y_1 = \frac{3}{2}$ a hodnotu $\rho_2(x, y) = \sqrt{(1 - \frac{3}{2})^2 + (2 - \frac{3}{2})^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.



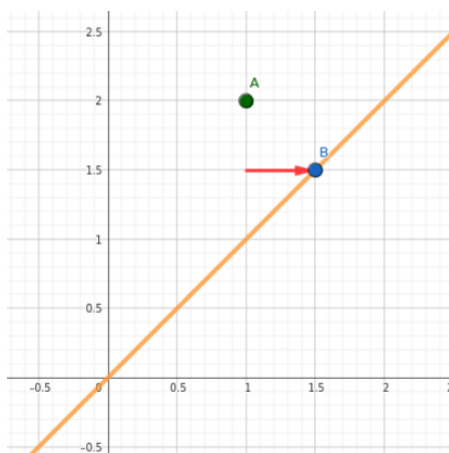
3. Analogicky. Uvažujme posloupnost $y = \{y_1, y_1, y_3, y_4 \dots\}$. Pak

$$\rho_\infty(x, y) = \sup |x_n - y_n|.$$

Tato $\rho_\infty(x, y)$ bude nejmenší v situaci, kdy $x_n = y_n$ pro $n \geq 3$. Pak

$$\rho_\infty(x, y) = \sup\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|, 0, 0, \dots\} = \max\{|1 - y_1|, |2 - y_1|\}.$$

Tedy hledáme minimum funkce $f(y_1) = |1 - y_1| + |2 - y_1|$. Minimum dostaneme v bodě $y_1 = \frac{3}{2}$ a hodnotu $\rho_\infty(x, y) = \frac{1}{2}$. (Srovnejte s Úlohou 5.3)



2

Definice 10. Necht $x \in X$, $r > 0$. Otevřenou kouli rozumíme množinu

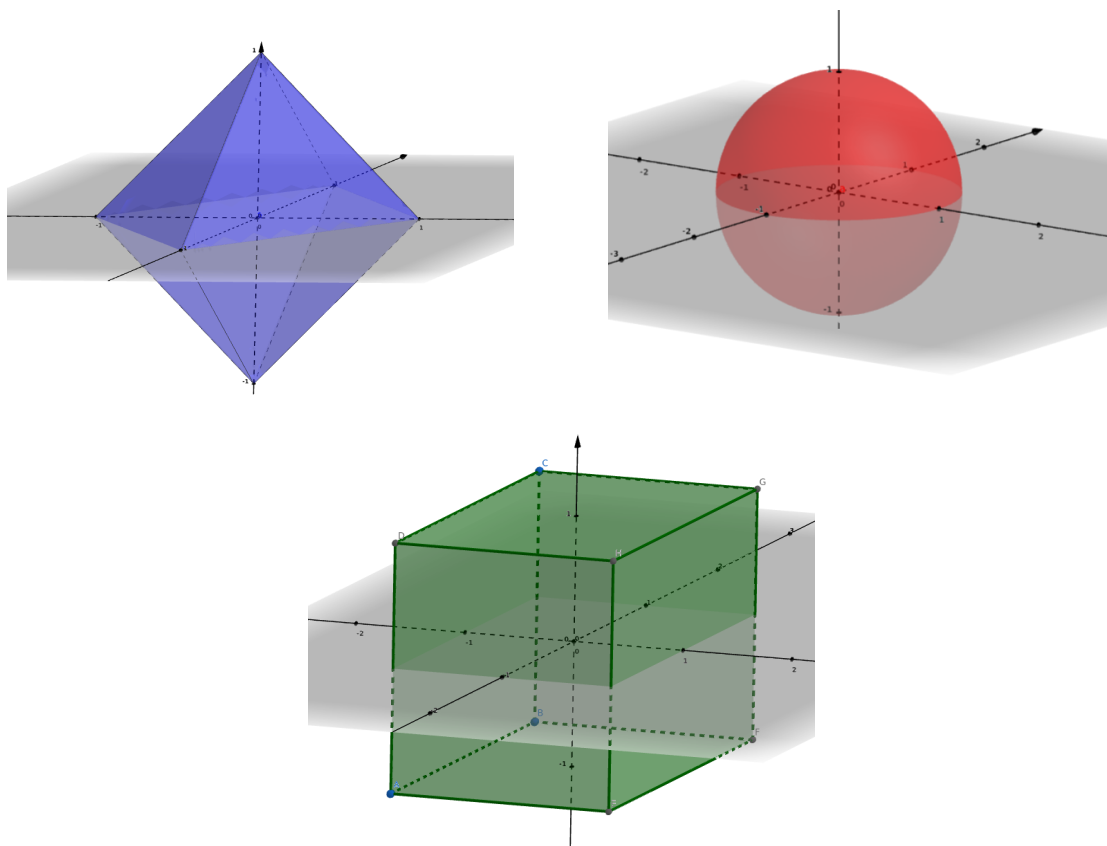
$$B(x, r) = \{y \in X; \rho(x, y) < r\}$$

Uzavřenou kouli rozumíme množinu

$$\bar{B}(x, r) = \{y \in X; \rho(x, y) \leq r\}$$

Úloha 11. Načrtněte jednotkovou kouli v prostoru (\mathbb{R}^3, ρ_1) , (\mathbb{R}^3, ρ_2) , $(\mathbb{R}^3, \rho_\infty)$.

Řešení:



Úloha 12. Jak vypadá koule v diskrétním metrickém prostoru?

Řešení: V diskrétní metrice závisí koule na poloměru. Je-li $r \leq 1$, splyne koule se svým středem: $B(x, r) = \{x\}$. Pro $r > 1$ se koule bude rovnat celému prostoru: $B(x, r) = X$.

Definice 13. Necht (X, ρ) je metrický prostor a $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ je posloupnost prvků X . Řekneme, že $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ konverguje k $y \in X$ v (X, ρ) , jestliže platí $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, y) = 0$. Prvek y nazýváme limitou posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ v (X, ρ) . Konvergentní posloupností v (X, ρ) rozumíme každou posloupnost prvků X , která má limitu v (X, ρ) .

Definice 14. Necht (X, ρ) je metrický prostor, $M \subset X$. Řekneme, že množina M je uzavřená v X , jestliže platí: pro každou posloupnost $\{x_n\}$ v M , splňující $x_n \rightarrow x$ pro nějaký prvek $x \in X$, pak platí: $x \in M$.

Definice 15. Necht $M \subset X$, $x \in X$. Řekneme, že $x \in X$ je *vnitřním bodem množiny* M , jestliže existuje $r > 0$ splňující $B(x, r) \subset M$.

Množina $M \subset X$ se nazývá *otevřená v* (X, ρ) , jestliže každý její bod je jejím vnitřním bodem.

Poznámka 16. 1. Množina F v metrickém prostoru (X, ρ) je uzavřená právě tehdy, když $X \setminus F$ je otevřená.

2. Množina G v metrickém prostoru (X, ρ) je otevřená právě tehdy, když $X \setminus G$ je uzavřená.

Úloha 17. Určete, zda je interval $(0, 1)$ otevřená či uzavřená množin v metrickém prostoru (X, ρ) , jestliže

1. $X = (0, 1)$, $\rho = \rho_1$,

Řešení: Otevřená i uzavřená, protože celý prostor je vždy otevřený i uzavřený.

2. $X = \mathbb{R}$, $\rho = \rho_1$,

Řešení: Otevřená.

3. $X = [0, 1]$ s diskrétní metrikou,

Řešení: Otevřená i uzavřená. Každá podmnožina diskrétního metrického prostoru je otevřená i uzavřená.

4. $X = (0, 1) \cup (3, 4)$, $\rho = \rho_1$.

Řešení: Otevřená i uzavřená. Otevřená - každému bodu lze opsat malou kouli, která se vejde do intervalu $(0, 1)$. Uzavřená - Stačí ukázat, že $(3, 4)$ je otevřená (to se ukáže stejně). Doplněk pak musí být uzavřená.

Definice 18. Necht $M \subset X$. Řekneme, že x je *hraničním bodem množiny* M , pokud pro každé $r > 0$ platí $B(x, r) \cap M \neq \emptyset$ a $B(x, r) \cap (P \setminus M) \neq \emptyset$. Množinu všech hraničních bodů nazýváme *hranice* a značíme ji ∂M .

Uzávěrem množiny M rozumíme množinu $\bar{M} = M \cup \partial M$.

Úloha 19. Určete, zda množina M je uzavřená, otevřená, co je její vnitřek, uzávěr, hranice (v \mathbb{R} s eukleidovskou metrikou):

1. $M = (0, 1)$

Řešení: Otevřená. $\text{Int } M = (0, 1)$ ($\text{Int } M$ značí vnitřek/všechny vnitřní body M). $\bar{M} = [0, 1]$. $\partial M = \{0, 1\}$.

2. $M = [0, 1]$

Řešení: Uzavřená. $\text{Int } M = (0, 1)$ $\bar{M} = [0, 1]$. $\partial M = \{0, 1\}$.

3. $M = (0, 1]$

Řešení: Ani otevřená, ani uzavřená. $\text{Int } M = (0, 1)$ $\bar{M} = [0, 1]$. $\partial M = \{0, 1\}$.

4. $M = (0, \infty)$

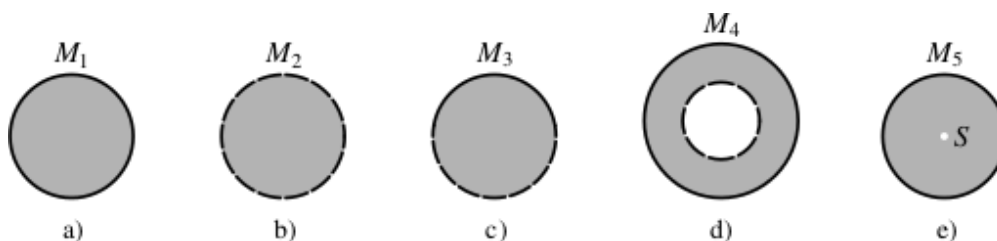
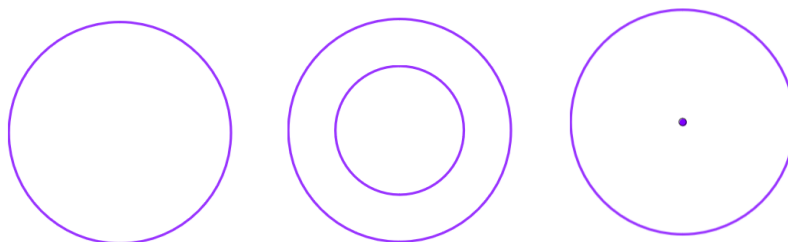
Řešení: Otevřená. $\text{Int } M = (0, \infty)$ $\bar{M} = [0, \infty)$. $\partial M = \{0\}$.

5. $M = [0, \infty)$

Řešení: Uzavřená. $\text{Int } M = (0, \infty)$ $\bar{M} = [0, \infty)$. $\partial M = \{0\}$.

6. $M = (-\infty, \infty)$

Řešení: Otevřená i uzavřená. $\text{Int } M = (-\infty, \infty)$ $\bar{M} = (-\infty, \infty)$. $\partial M = \emptyset$.

7. \mathbb{N} **Řešení:** Uzavřená. $\text{Int } M = \emptyset$. $\overline{M} = \mathbb{N}$. $\partial M = \mathbb{N}$.8. \mathbb{Q} **Řešení:** Ani uzavřená, ani otevřená. $\text{Int } M = \emptyset$. $\overline{M} = \mathbb{R}$. $\partial M = \mathbb{R}$.9. \mathbb{R} **Řešení:** Otevřená i uzavřená. $\text{Int } M = \mathbb{R}$. $\overline{M} = \mathbb{R}$. $\partial M = \emptyset$.**Úloha 20.** Určete, zda je daná množina uzavřená, uzavřená, najděte hranici (v \mathbb{R}^2).**Řešení:** Množina (a) je uzavřená, množina (b) otevřená, množiny (c-e) ani jedno. Hranice: Pro (a-c) jde o kružnici. Pro (d) o dvě kružnice, pro (e) kružnice a bod.**Úloha 21.** Rozhodněte, zda platí (v obecném metrickém prostoru):

1. $\overline{B(x, r)} = \overline{B}(x, r)$

Řešení: Zdroj: <https://www.karlin.mff.cuni.cz/~pick/analyza.pdf>Platí $\overline{B(x, r)} \subseteq \overline{B}(x, r)$.Důkaz: Necht' $x \in X$, $r > 0$. Zvolme $y \in \partial B(x, r)$. Pro spor předpokládejme, že $y \notin \overline{B}(x, r)$. Tedy $\rho(x, y) > r$.Položme $s = \rho(x, y) - r > 0$.Pak pro každé $z \in B(y, s)$ platí

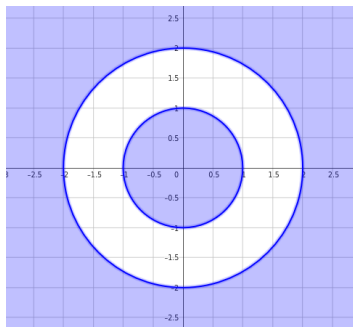
$$\rho(x, z) \geq \rho(x, y) - \rho(y, z) > \rho(x, y) - s = r.$$

Tedy $z \notin B(x, r)$. Pak ale $B(y, s) \cap B(x, r) = \emptyset$. Což je spor s definicí hranice.

Opačná inkluze neplatí. Uvažujme metrický prostor

$$\mathbb{R}^2 \setminus \{1 < x^2 + y^2 < 4\}$$

Pak $\overline{B(o, 2)} = \overline{B}(o, 1) \neq \overline{B}(o, 2)$



2. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

Řešení: Nikoli. Např. $A = (0, 1)$, $B = (1, 2)$. Pak $\overline{A \cap B} = \overline{\emptyset} = \emptyset$, ale $\overline{A} \cap \overline{B} = [0, 1] \cap [1, 2] = \{1\} = \overline{\{1\}}$.

Úloha 22. Najděte uzávěry grafů funkcí v \mathbb{R}^2

1.

$$f(x) = \begin{cases} \sin(1/x), & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Řešení: Graf samotný sjednocen s úsečkou $\{[0, y], y \in [-1, 1]\}$.

2. Dirichletova funkce

Řešení: Osa x a přímka $y = 1$.

3. Riemannova funkce

Řešení: Graf sjednocený s osou x .

Úloha 23. Najděte netriviální $A \subset \mathbb{R}$, aby splňovala následující

1. $\overline{A} = \partial A$

Řešení: $\{1\}$

2. $\text{Int } \overline{A} \supsetneq A$

Řešení: \mathbb{Q}

3. $\text{Int } \overline{A} \subsetneq A$

Řešení: $[0, 1)$

4. $\overline{\text{Int } A} \subsetneq A$

Řešení: \mathbb{Q}

5. $\overline{\text{Int } A} \supsetneq A$

Řešení: $(0, 42]$

6. $\overline{\text{Int } A} = A$

Řešení: $[-3, 5]$