$\cancel{x}' = -x + y - 2e^{-t}$ $\qquad y(t)$

$y' = -6x + 4y - 4e^{-t}$ $\qquad x(t)$

(1)

$$\begin{array}{cc} x & y \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} (\lambda+1) & -1 & -2e^{-t} \\ 6 & (\lambda-4) & -4e^{-t} \end{array}\right) \,|\cdot(-6)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} -6(\lambda+1) & 6 & 12e^{-t} \\ 6 & (\lambda-4) & -4e^{-t} \end{array}\right) \cdot(\lambda+1)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 6+(\lambda-4)(\lambda+1) & 12e^{-t} + (\lambda+1)(-4e^{-t}) \\ 6 & \lambda-4 & -4e^{-t} \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 0 & \lambda^2-3\lambda+2 & 12e^{-t}+(-4)\cdot(-e^{-t})+(-4e^{-t}) \\ 6 & \lambda-4 & -4e^{-t} \end{array}\right)$$

(2) $y'' - 3y' + 2y = 12e^{-t}$

$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$

$\lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = 2$

$y_H = C_1 e^{t} + C_2 e^{2t}$

y_p: $12e^{-t} = e^{-1\cdot t}(12\cos(0t) + 0\sin(0$

$a+bi = -1+0i$ není kořen

$y_p = A e^{-t}$

$y_p' = -Ae^{-t}$

$y_p'' = Ae^{-t}$

$Ae^{-t} - 3(-Ae^{-t}) + 2Ae^{-t} = 12e^{-t}$

$6A = 12$

$A = 2$

$y_p = 2Aet$

$y = C_1 e^{t} + C_2 e^{2t} + 2\cdot e^{-t}$

(3) $6x + (D-4)y = -4e^{-t}$

$x = \frac{1}{6}\left(-4e^{-t} - y' + 4y\right)$

$$x = \frac{1}{6}\left(-4e^{-t} - c_1e^{t} - 2c_2e^{2t} + 2e^{-t} + 4c_1e^{t} + 4c_2e^{2t} + 8e^{-t}\right)$$

$$= \underline{e^{-t} + \frac{1}{2}c_1e^{t} + \frac{1}{3}c_2e^{2t}} \qquad t \in \mathbb{R} \quad c_{1,2} \in \mathbb{R}$$

Řešení soustav pomocí úprav λ-matice

Tento způsob řešení se od předchozího liší pouze formou zápisu. Díky přehlednějšímu formalismu však umožňuje řešit i větší soustavy. Buď λ operátor derivování, tj. $\lambda z := z'$, $\lambda^2 z = z''$, $\ldots$. S využitím tohoto označení můžeme namísto operací s rovnicemi provádět operace s řádky matice, ve které se vyskytují polynomy v proměnné λ. Konkrétně se jedná o úpravy:

- záměna pořadí řádků matice,
- vynásobení řádku matice číslem,
- přičtení $P(\lambda)$-násobku jednoho řádku k jinému řádku, kde P je polynom.

Matici snadno upravíme na trojúhelníkový tvar pomocí Gaussovy eliminace. Navíc můžeme takto upravovat rozšířenou matici o sloupec pravých stran a řešit tak rovnou nehomogenní rovnici.
Pozor, není možné vynásobit řádek polynomem v λ, tím by se zvýšil řád soustavy. Také není možné polynomy dělit.

Příklad 2. Najděte všechna maximální řešení soustavy

$$\begin{aligned} x' &= 2x + y - z\,, \\ y' &= 7x + 4y - z\,, \\ z' &= 13x + 7y - 3z\,. \end{aligned}$$

Řešení. S využitím zápisu pomocí λ dostáváme

$$\begin{aligned} \lambda x - 2x - y + z &= 0\,, \\ -7x + \lambda y - 4y + z &= 0\,, \\ -13x - 7y + \lambda z + 3z &= 0\,. \end{aligned}$$

Upravujme tedy matici

$$\begin{pmatrix} \lambda - 2 & -1 & 1 \\ -7 & \lambda - 4 & 1 \\ -13 & -7 & \lambda + 3 \end{pmatrix}$$

Od druhého řádku odečteme první řádek a od třetího řádku odečteme $(\lambda+3)$ násobek prvního řádku:

$$\sim \begin{pmatrix} \lambda - 2 & -1 & 1 \\ -\lambda - 5 & \lambda - 3 & 0 \\ -(\lambda - 2)(\lambda + 3) - 13 & (\lambda + 3) - 7 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - 2 & -1 & 1 \\ -\lambda - 5 & \lambda - 3 & 0 \\ -\lambda^2 - \lambda - 7 & \lambda - 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Od druhého řádku odečteme třetí řádek a poté od třetího řádku odečteme $(\lambda - 4)$-násobek druhého řádku

$$\sim \begin{pmatrix} \lambda - 2 & -1 & 1 \\ \lambda^2 + 2 & 1 & 0 \\ -\lambda^2 - \lambda - 7 & \lambda - 4 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \lambda - 2 & -1 & 1 \\ \lambda^2 + 2 & 1 & 0 \\ -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 3\lambda + 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

V posledním řádku máme nyní rovnici $-x''' + 3x'' - 3x' + x = 0$, v matici je tedy rovnou charakteristický polynom této rovnice. Dostáváme tedy řešení

$$x(t) = c_1 e^t + c_2 t e^t + c_3 t^2 e^t\,, \quad t \in \mathbb{R}\,, c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}\,.$$

Z druhého řádku matice dopočítáme y:

$$y(t) = -x'' - 2x = -e^t(3c_1 + 2c_2 + 2c_3 + t(3c_2 + 4c_3) + t^2 \cdot 3c_3)\,, \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

Z první rovnice dopočítáme z:

$$z(t) = e^t(-2c_1 - 3c_2 - 2c_3 + t(-2c_2 - 6c_3) + t^2 \cdot (-2c_3))\,, \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

Příklad 3. Řešte soustavu

$$\begin{aligned} 2y'' + 3z'' - 7y - 6z &= t + 1 \\ 4y'' + 3z'' - 4y - 3z &= 2t. \end{aligned}$$

Řešení. Napíšeme si λ-matici s pravou stranou:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2\lambda^2 - 7 & 3\lambda^2 - 6 & t+1 \\ 4\lambda^2 - 4 & 3\lambda^2 - 3 & 2t \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2\lambda^2 - 7 & 3\lambda^2 - 6 & t+1 \\ 2\lambda^2 + 3 & 3 & t-1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 2\lambda^2 - 7 - (\lambda^2 - 2)(2\lambda^2 + 3) & 0 & t + 1 - (t-1)'' + 2(t-1) \\ 2\lambda^2 + 3 & 3 & t - 1 \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{cc|c} -2\lambda^4 + 3\lambda^2 - 1 & 0 & 3t - 1 \\ 2\lambda^2 + 3 & 3 & t - 1 \end{array}\right).$$

Řešení charakteristického polynomu v prvním řádku jsou $\lambda_{1,2} = \pm 1$, $\lambda_{3,4} = \pm\sqrt{2}/2$. Tedy řešení homogenní rovnice

$$-2y^{(4)} + 3y'' - y = 0$$

jsou

$$ae^t + be^{-t} + ce^{\sqrt{2}/2t} + de^{-\sqrt{2}/2t}.$$

Partikulární řešení nehomogenní rovnice bude ve tvaru $y_p(t) = rt + s$, což po dosazení do rovnice dává $y_p(t) = -3t + 1$. Tedy

$$y(t) = ae^t + be^{-t} + ce^{\sqrt{2}/2t} + de^{-\sqrt{2}/2t} - 3t + 1\,.$$

Z druhé rovnice pak máme

$$\begin{aligned}
3z(t) &= t - 1 - 2y'' - 3y = t - 1 - 2(ae^t + be^{-t} + \frac{1}{2}ce^{\sqrt{2}/2t} + \frac{1}{2}de^{-\sqrt{2}/2t}) \\
&\quad -3(ae^t + be^{-t} + ce^{\sqrt{2}/2t} + de^{-\sqrt{2}/2t} - 3t + 1) \\
&= 10t - 4 - 5ae^t - 5be^{-t} - 4ce^{\sqrt{2}/2t} - 4de^{-\sqrt{2}/2t}\,.
\end{aligned}$$