25. cvičení – Teorie

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

1 Implikace

1. Najděte nebo vyvraťte všechny možné implikace mezi následujícími čtveřicemi výroků. (od prof. M. Huška: https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~mhusek/)

   (a) Nechť $A \subset \mathbb{R}$

   (A) A je nespočetná

   (B) A je nekonečná

   (C) A je neomezená

   (D) $\mathbb{R} \setminus A$ je spočetná

   Řešení:

   A $\Rightarrow$ B: nespočetné množiny musí být nekonečné

   B $\not\Rightarrow$ A: protipříklad - spočetné množiny, např. $\mathbb{Q}$ nebo $\mathbb{N}$.

   A $\not\Rightarrow$ C: protipříklad - interval $(1, 2)$

   C $\not\Rightarrow$ A: protipříklad - spočetná množina, např. $\mathbb{N}$

   A $\not\Rightarrow$ D: protipříklad - např. $A = (0, \infty)$, pak $\mathbb{R} \setminus A = (-\infty, 0]$

   D $\Rightarrow$ A: množina $\mathbb{R}$ je nespočetná, navíc platí $\mathbb{R} = A \cup (\mathbb{R} \setminus A)$. Odtud plyne že A nebo $\mathbb{R} \setminus A$ musí být nespočetná. Kdyby byly obě spočetné, tak jejich sjednocení musí být také spočetné, což je spor.

   B $\not\Rightarrow$ C: protipříklad - interval $(1, 2)$

   C $\Rightarrow$ B: sporem - kdyby A byla konečná, tak lze vybrat její největší (a nejmenší) prvek. Pak je ale omezená, což je spor.

   B $\not\Rightarrow$ D: protipříklad - např. $\mathbb{Q}$

   D $\Rightarrow$ B: podobně jako D $\Rightarrow$ A. Kdyby A byla konečná, tak $\mathbb{R} = A \cup \mathbb{R} \setminus A$ by musela být spočetná, což je spor.

   C $\not\Rightarrow$ D: protipříklad - např. $\mathbb{Z}$.

   D $\Rightarrow$ C: sporem - nechť A je omezená, tedy $A \subset (a, b)$. Pak ale $\mathbb{R} \setminus A \supset (-\infty, a) \cup (b, \infty)$, tedy musí být nespočetná, což je spor.

(b) Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost.
  (A) $\{a_n\}$ není konstantní
  (B) $\{a_n\}$ má prostou podposloupnost
  (C) $\{a_n\}$ má ryze monotónní podposloupnost
  (D) množina hodnot $\{a_n\}$ je nekonečná

Řešení:

$A \not\Rightarrow B$: protipříklad - $(-1)^n$

$B \Rightarrow A$: jesltiže je b_n prostá podposloupnost a_n, tak musí mít alespoň dva různé prvky. Tedy je má i a_n, tedy není konstantní.

$A \not\Rightarrow C$: protipříklad - $(-1)^n$

$A \not\Rightarrow D$: protipříklad - $(-1)^n$

$D \Rightarrow A$: Kdyby a_n byla konstantní, tak množina hodnot by byla jediný bod $\{a_1\}$, což je spor.

$B \Rightarrow C$: Nechť $\{b_n\}$ je prostá podposloupnost a_n. Uvažujme případ, že b_n je omezená. Pak z Bolzano - Weierstrassovy věty existuje konvergentní podposloupnost c_n. Označme $C = \lim_{n\to\infty} c_n$. Pak alespoň jedna z množin $K = \{n, c_n > C\}$ a $Z = \{n, c_n < C\}$ je nekonečná (plyne z prostoty). BÚNO K je nekonečná. Pak z definice limity existuje prvek $\bar{c}_1$ takový, že $\bar{c}_1 - C < 1$. Dále musí existovat $\bar{c}_2$: $\bar{c}_2 - C < \frac{\bar{c}_1 - C}{2}$. Postupně zkonstruujeme posloupnost $\{\bar{c}_k\}$ tak, že $\bar{c}_{k+1} - C < \frac{\bar{c}_k - C}{2}$. Uvažovaná podposloupnost $\bar{c}_k$ je pak monotónní.
Nechť b_n není omezená. BÚNO b_n je neomezená shora. Pak existuje prvek $\bar{b}_1 > 1$. K němu existuje prvek $\bar{b}_2 > 2\bar{b}_1$. Dále konstruujme $\bar{b}_{n+1} > 2\bar{b}_n$. Hledaná monotónní podposloupnost je pak $\{\bar{b}_n\}$.

$C \Rightarrow B$: ryze monotónní podposloupnost je zároveň prostá

$C \Rightarrow A$: Plyne ze $C \Rightarrow B$ a $B \Rightarrow A$.

$B \Rightarrow D$: Nechť b_n je prostá podposloupnost. Pro ni platí, že $b_n \neq b_m$, kdykoli $m \neq n$. Pak množina hodnot posloupnosti a_n obsahuje množinu $\{b_n, n \in \mathbb{N}\}$, která ale musí být nekonečná (žádné dva prvky b_n nemohou být stejné).

$D \Rightarrow B$: Uvažujme A množinu hodnot a_n. Položme $b_1 = a_1$. Položme $A_1 = A \setminus \{b_1\}$. Protože A je nekonečná, tak i A_1 je nekonečná.
Položme $b_2 = a_k$, tak, že k je nejmenší možné takové k, že $a_k \in A$. Pak platí, že $A_2 = A_1 \setminus \{b_k\}$ je opět nekonečná.
Postupujme indukcí.

$C \Rightarrow D$: Plyne ze $C \Rightarrow B$ a $B \Rightarrow D$.

$D \Rightarrow C$: Plyne ze $D \Rightarrow B$ a $B \Rightarrow C$.

2 Úvod a Posloupnosti

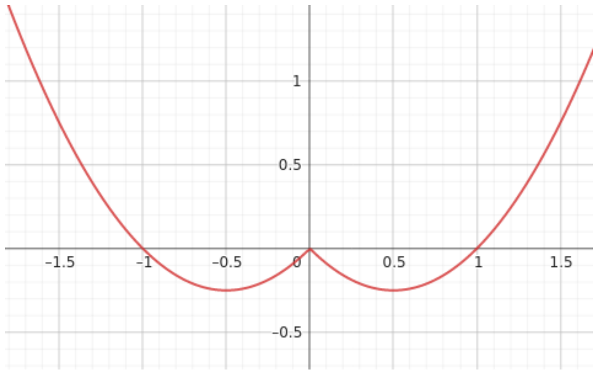
2. Existují posloupnosti $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ tak, že $\lim a_n = 0$, $\lim b_n = +\infty$ a $\lim a_n b_n$ neexistuje?
   Řešení: Ano. Např. $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$, $b_n = n$.
3. Sestrojte konvergentní posloupnost takovou, že $\max\{a_n\}$ neexistuje.
   Řešení: Např. $a_n = -1/n$.
4. Nechť $\{a_n\}$ konverguje. Musí platit $\lim(a_{n+1} - a_n) = 0$ a $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$?
   Řešení:
   Ano - limita vybrané podposloupnosti a aritmetika limit.
   Ne, např. $\{q^n\}$, $|q| < 1$ (aritmetika limit selže kvůli dělení 0).
5. (a) Nechť $\{a_n\}$ je konvergentní posloupnost celých čísel. Musí být limita celé číslo?
   Řešení: Ano. Aby byla taková posloupnost konvergentní, musí být od jistého členu konstantní. Tedy limita je celé číslo.

   (b) Nechť $\{a_n\}$ je konvergentní posloupnost racionálních čísel. Musí být limita racionální číslo?
   Řešení: Ne. Např. posloupnost $3;\ 3,1;\ 3,14;\ 3,141;\ 3,1415\ldots \to \pi$.
6. Jestliže platí, že $a_{n+2} \geq a_n$, musí mít posloupnost limitu? Co když přidáme omezenost?
   Řešení: Ne. Např. $(-1)^n$.
7. Najděte k dané neomezené posloupnosti a_n takovou nenulovou posloupnost b_n, aby $a_n b_n \to 0$.
   Řešení: Pro členy $a_n = 0$ položme $b_n = 1$. Pro nenulové a_n uvažujme $b_n = \frac{1}{a_n} \cdot \frac{1}{n}$.
8. Stačí pro konvergenci posloupnosti, aby $|a_{n+1} - a_n| \xrightarrow{n\to\infty} 0$?
   Řešení: Ne. Např. pro $a_n = \log n$ máme $\lim_{n\to\infty} \log n = \infty$, ale $\log(n+1) - \log n = \log \frac{n+1}{n} \to 0$.
9. Nechť $b \in \mathbb{R}^*$. Najděte posloupnost $\{a_n\}$, aby $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = b$.
   Řešení: Pro $b \in \mathbb{R}$ uvažujme $a_n = b^n$. Pro $b = \infty$ máme např. $a_n = n^n$. Pro $b = -\infty$ pak $a_n = (-1)^n n^n$.
10. Nechť M je neomezená množina, nechť $\beta > 0$. Existuje pak $A \subset M$ nekonečná tak, že $\forall x, y \in A$, $x \neq y$ platí, že $|x - y| > \beta$?
    Řešení: Ano. BÚNO nechť M je neomezená shora. Pak uvažujme množiny $B_1 = [0, \beta)$, $B_2 = [\beta, 2\beta)$, $B_3 = [2\beta, 3\beta)\ldots$
    Položme $I_s = \{i \in \mathbb{N} : i \text{ je sudé a } M \cap B_i \neq \emptyset\}$. Analogicky položme $I_l = \{i \in \mathbb{N} : i \text{ je liché a } M \cap B_i \neq \emptyset\}$.
    Pak alespoň jedna z množin I_s a I_l je nekonečná množina (jinak by M byla omezená). BÚNO I_s je nekonečná. Pak z každé množiny B_i, kde $i \in I_s$ vybereme jeden prvek $x_i \in B_i$. Množina $A = \bigcup_{i \in I_s} \{x_i\}$ pak má odpovídající vlastnosti.

3 Funkce

11. Nechť je funkce klesající na disjunktních intervalech I a J. Musí být klesající na $I \cup J$?
Řešení: Ne. Např. $\frac{1}{x}$ na $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$.

12. Nechť je funkce konvexní na intervalu $[-1, 0]$ a také na $[0, 1]$? Musí být pak konvexní na $[-1, 1]$?
Řešení: Ne. Např. Sudé rozšíření funkce $x(x-1)$.



13. Sestrojte (stačí obrázkem) nezápornou funkci f na intervalu $(0, 1)$, nespojitou právě v bodech množiny $\{\frac{1}{n};\ n \in \mathbb{N}\}$ tak, aby $\lim_{x\to 0+} f(x) = 0$ a aby
$$\inf\{f(x); x \in (0,1)\} = 0, \qquad \sup\{f(x);\ x \in (0,1)\} = 1.$$
Řešení: Např. $f(1/n) = 1/(n-1)$, $f = 0$ jinde.

14. Nechť f je nekonstantní periodická funkce na $\mathbb{R}$. Ukažte, že pak neexistuje $\lim_{x\to\infty} f(x)$.
Řešení: Sporem. Nechť f je periodická s periodou p. Jelikož je nekonstantní, tak existují body a, b tak, že $f(a) \neq f(b)$. Pak pro různé dvě posloupnosti $\lim_{n\to\infty} f(a + pn) = \lim_{n\to\infty} f(a) = f(a) \neq \lim_{n\to\infty} f(b + pn) = \lim_{n\to\infty} f(b) = f(b)$. Což je spor s Heineho větou.

15. Nechť f je funkce spojitá na $\mathbb{R}$, pro kterou existují limity v nevlastních bodech a
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$
Zjistěte, zda je pak již f omezená a zda nabývá v alespoň jednom bodě z $\mathbb{R}$ maxima nebo minima.
Řešení: Je-li funkce konstantní, pak již musí být nutně $f \equiv 0$, tedy je omezená a nabývá extrémů.
Nechť f není konstantní.
Omezenost. Pak existují intervaly $(-\infty, a)$ a (b, ∞) takové, že na nich $|f| < 2$ (z definice limity). Na intervalu $[a, b]$ je pak f omezená z věty o spojitosti a nabývání extrémů.
Nabývání extrémů. Jelikož f je nekonstantní, tak existuje x_0, takové, že $f(x_0) \neq 0$, BÚNO $f(x_0) > 0$. Pak z definice limity existují intervaly $(-\infty, a)$ a (b, ∞) takové, že na nich $f(x) < f(x_0)/2$.
Interval $[a, b]$ je omezený a uzavřený, tedy na něm funkce f nabývá maximum. Jeho hodnotu můžeme odhadnout $\max_{[a,b]} f(x) \geq f(x_0)$. Mimo tento interval vyšší hodnota nemůže nastat, tedy jsme našli maximum.

16. Rozhodněte, zda je funkce

$$f(x) = \arctan \frac{1+x}{1-x} - \arctan x$$

konstantní ve svém definičním oboru a řešení odůvodněte.
Řešení: Na intervalech $(-\infty, 1)$ a $(1, \infty)$ má funkce derivaci

$$f'(x) = \frac{1}{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2 + 1} \cdot \frac{2}{(1-x)^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0.$$

Na každém intervalu zvlášť je tedy konstantní. Na celém D_f ale konstantní není, protože např. $f(-1) = 0 - \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$, ale $\lim_{x\to\infty} f(x) = \arctan(-1) - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = -\frac{3\pi}{4}$.

17. Najděte příklad funkce, pro kterou existují derivace na intervalech (a, c) a (c, b), dále existují a jsou si rovny $\lim_{x\to c-} f'(x) = \lim_{x\to c+} f'(x)$ a přitom neexistuje $f'(c)$.
Řešení: Např. $|\operatorname{sgn} x|$.

18. Napište příklad funkce, která není spojitá v bodě 7 a přitom $f'_+(7) = 2$.
Řešení: Např.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 7, \\ 2x, & x \geq 7. \end{cases}$$

19. Nechť je funkce f spojitá v bodě 0. Musí existovat $f'_+(0)$? Dokažte, nebo sestrojte protipříklad.
Řešení: Ne. Např.

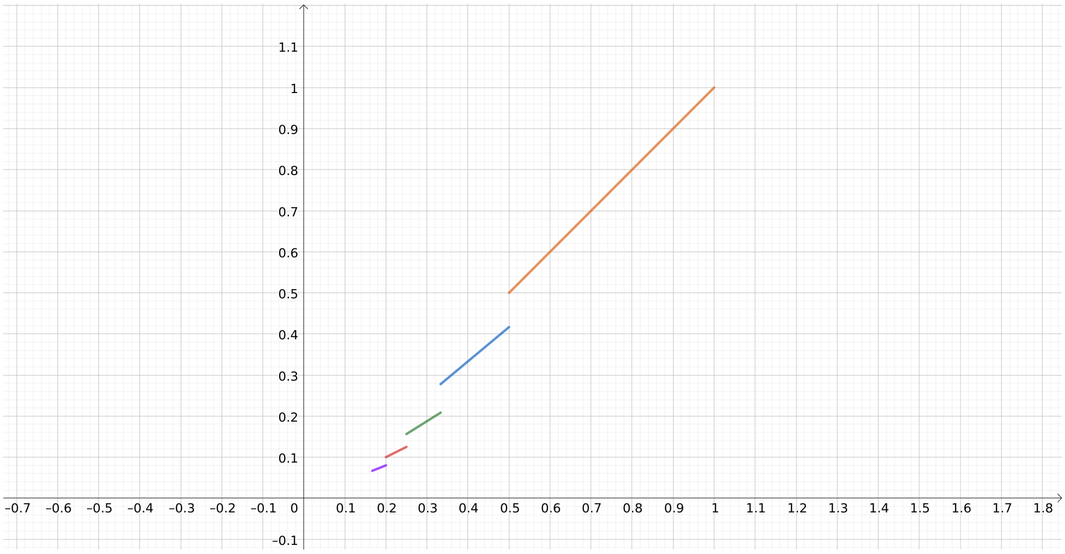
$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Pak $0 = f(0) = \lim_{x\to 0} x \sin \frac{1}{x}$ (omezená a mizející), tedy je f spojitá v 0.
Pro derivaci máme

$$f'_+(0) = \lim_{h\to 0+} \frac{h \sin \frac{1}{h} - 0}{h} = \lim_{h\to 0+} \sin \frac{1}{h}$$

Limita vpravo ale neexistuje. Uvažujme Heineho větu a posloupnosti $a_n = \frac{1}{2\pi n}$ a $b_n = \frac{1}{(\frac{\pi}{2} + 2\pi n)}$.

20. Sestrojte (stačí obrázkem) ryze monotónní funkci na intervalu $(0, 1)$, která má infimum hodnot rovné 0, supremum hodnot rovné 1 a je nespojitá právě v bodech $1/n$ pro $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$.
Řešení:
Konstruujeme postupně do 0 jako na obrázku:



21. Nechť $f(x)$ a $g(x)$ jsou funkce. (A předpokládáme, že následující výroky mají smysl.) Určete, které výroky jsou pravdivé

(a) f i g jsou liché.

i. $f+g$ je lichá
Řešení: Ano. $(f+g)(-x) = f(-x)+g(-x) = -f(x)+-g(x) = -(f+g)(x)$

ii. fg je lichá
Řešení: Ne, je sudá. $(fg)(-x) = -f(x)\cdot(-(g(x))) = f(x)g(x)$

iii. $f(g)$ je lichá
Řešení: Ano, $f(g(-x)) = f(-g(x)) = -f(g(x))$

(b) f je sudá, g je lichá.

i. fg je sudá
Řešení: Ne. Je lichá, $(fg)(-x) = f(x)\cdot(-g(x)) = -(fg)(x)$

ii. $f(g)$ je sudá
Řešení: Ano. $f(g(-x)) = f(-g(x)) = f(g(x))$

iii. $g(f)$ je sudá
Řešení: Ano. $g(f(-x)) = g(f(x))$

iv. $g+f$ je sudá
Řešení: Ne. Např. x a x^2. Pak $f+g = x+x^2 = x(1+x)$.

(c) f i g jsou rostoucí

i. $f+g$ jsou rostoucí
Řešení: Ano. Nechť $s<t$. Pak $(f+g)(s) = f(s)+g(s) \leq f(t)+g(t)$.

ii. fg jsou rostoucí
Řešení: Ne. Např x a x.

iii. $f(g)$ jsou rostoucí
Řešení: Ano. Nechť $s<t$. Pak $g(s)\leq g(t)$. Tedy $f(g(s))\leq f(g(t))$.

(d) f je sudá

i. je-li f rostoucí na $(0,\infty)$, je rostoucí i na $(-\infty,0)$.

Řešení: Ne. Např. x^2.

ii. je-li f konvexní na $(0, \infty)$, je konvexní i na $(-\infty, 0)$.
Řešení: Ano. Je-li f konvexní na $(0, \infty)$, tak pro $0 < s < t < u$ máme

$$\frac{f(t) - f(s)}{t - s} \leq \frac{f(u) - f(t)}{u - t}$$

Pro $-u < -t < -s < 0$ pak je

$$\frac{f(-u) - f(-t)}{-u + t} = \frac{f(u) - f(t)}{-(u - t)} \leq -\frac{f(t) - f(s)}{t - s} = \frac{f(-t) - f(-s)}{-t + s}$$