25. cvičení – Teorie

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

1 Implikace

1. Najděte nebo vyvraťte všechny možné implikace mezi následujícími čtveřicemi výroků.
   (od prof. M. Huška: https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~mhusek/)
   Jak na to:

   - nakreslíme si diagram a doplňujeme šipky, nejlépe velké a barevně. Další šipky je pak možno doplnit/vyvrátit díky tranzitivitě.

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & B \\ \downarrow & \searrow & \not\uparrow \\ D & \begin{smallmatrix}\not\longleftarrow \\ \longrightarrow\end{smallmatrix} & C \end{array}$$

   - dokazujeme přímo $A \implies B$;
   - nepřímo $B' \implies A'$;
   - pro vyvrácení nebo sporem $A \wedge B'$;
   - protipříklad, který splňuje $A \wedge B'$.

   (a) Nechť $A \subset \mathbb{R}$

   (A) A je nespočetná
   (B) A je nekonečná
   (C) A je neomezená
   (D) $\mathbb{R} \setminus A$ je spočetná

   ✿ $D \Rightarrow A$

   (b) Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost.

   (A) $\{a_n\}$ není konstantní
   (B) $\{a_n\}$ má prostou podposloupnost
   (C) $\{a_n\}$ má ryze monotónní podposloupnost
   (D) množina hodnot $\{a_n\}$ je nekonečná

   ❀ $B \Rightarrow C$

2 Úvod a Posloupnosti

2. Existují posloupnosti $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ tak, že $\lim a_n = 0$, $\lim b_n = +\infty$ a $\lim a_n b_n$ neexistuje?
3. Sestrojte konvergentní posloupnost takovou, že $\max\{a_n\}$ neexistuje.
4. Nechť $\{a_n\}$ konverguje. Musí platit $\lim(a_{n+1} - a_n) = 0$ a $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$?
5. (a) Nechť $\{a_n\}$ je konvergentní posloupnost celých čísel. Musí být limita celé číslo?
   (b) Nechť $\{a_n\}$ je konvergentní posloupnost racionálních čísel. Musí být limita racionální číslo?
6. Jestliže platí, že $a_{n+2} \geq a_n$, musí mít posloupnost limitu? Co když přidáme omezenost?
7. Najděte k dané neomezené posloupnosti a_n takovou nenulovou posloupnost b_n, aby $a_n b_n \to 0$.
8. ☘ Stačí pro konvergenci posloupnosti, aby $|a_{n+1} - a_n| \xrightarrow{n\to\infty} 0$?
9. Nechť $b \in \mathbb{R}^*$. Najděte posloupnost $\{a_n\}$, aby $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = b$.
10. Nechť M je neomezená množina, nechť $\beta > 0$. Existuje pak $A \subset M$ nekonečná tak, že $\forall x, y \in A$, $x \neq y$ platí, že $|x - y| > \beta$?

---

3 Funkce

11. Nechť je funkce klesající na disjunktních intervalech I a J. Musí být klesající na $I \cup J$?
12. Nechť je funkce konvexní na intervalu $[-1, 0]$ a také na $[0, 1]$? Musí být pak konvexní na $[-1, 1]$?
13. Sestrojte (stačí obrázkem) nezápornou funkci f na intervalu $(0, 1)$, nespojitou právě v bodech množiny $\{\frac{1}{n};\ n \in \mathbb{N}\}$ tak, aby $\lim_{x\to 0+} f(x) = 0$ a aby
$$\inf\{f(x); x \in (0,1)\} = 0, \qquad \sup\{f(x);\ x \in (0,1)\} = 1.$$
14. ❄ Nechť f je nekonstantní periodická funkce na $\mathbb{R}$. Ukažte, že pak neexistuje $\lim_{x\to\infty} f(x)$.
15. ✽ Nechť f je funkce spojitá na $\mathbb{R}$, nechť navíc existují limity v nevlastních bodech a
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$
Zjistěte, zda je pak již f omezená a zda nabývá v alespoň jednom bodě z $\mathbb{R}$ maxima nebo minima.
16. Rozhodněte, zda je funkce
$$f(x) = \arctan\frac{1+x}{1-x} - \arctan x$$
konstantní ve svém definičním oboru a řešení odůvodněte.
17. ✽ Najděte příklad funkce, pro kterou existují derivace na intervalech (a, c) a (c, b), dále existují a jsou si rovny $\lim_{x\to c-} f'(x) = \lim_{x\to c+} f'(x)$ a přitom neexistuje $f'(c)$.
18. Napište příklad funkce, která není spojitá v bodě 7 a přitom $f'_+(7) = 2$.
19. ♡ Nechť je funkce f spojitá v bodě 0. Musí existovat $f'_+(0)$? Dokažte, nebo sestrojte protipříklad.
20. Sestrojte (stačí obrázkem) ryze monotónní funkci na intervalu $(0, 1)$, která má infimum hodnot rovné 0, supremum hodnot rovné 1 a je nespojitá právě v bodech $1/n$ pro $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$.
21. Nechť $f(x)$ a $g(x)$ jsou funkce. (A předpokládáme, že následující výroky mají smysl, například že složení $f(g))$ je dobře definované na celém definičním oboru g atd....) Určete, které výroky jsou pravdivé

    (a) f i g jsou liché.
      i. $f + g$ je lichá
      ii. fg je lichá
      iii. $f(g)$ je lichá

    (b) f je sudá, g je lichá.
      i. fg je sudá
      ii. $f(g)$ je sudá
      iii. $g(f)$ je sudá
      iv. $g + f$ je sudá

    (c) f i g jsou rostoucí
      i. $f + g$ jsou rostoucí
      ii. fg jsou rostoucí
      iii. $f(g)$ jsou rostoucí

    (d) f je sudá
      i. je-li f rostoucí na $(0, \infty)$, je rostoucí i na $(-\infty, 0)$.
      ii. je-li f konvexní na $(0, \infty)$, je konvexní i na $(-\infty, 0)$.

(1a) $D \Rightarrow A$: zkoumejte $A \cup (\mathbb{R} \setminus A)$.
(1b) $B \Rightarrow C$: myšlenka jako v Dk. Bolzano-Weierstrassovy věty.
(8) co $\log n$?
(14) Heine.
(15) Definice limity + nabývání extrémů na omezeném a uzavřeném intervalu.
(17) Máme nějakou větu o limitě derivací? Jaké má podmínky? (A co tedy nesmí splňovat naše problematická funkce?)
(19) $x \sin \frac{1}{x}$