



24. cvičení – Taylor a limity 2

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Příklady

Všechna malá o se týkají $x \rightarrow 0$, $y \rightarrow 0$.

1. Pomocí Taylorova rozvoje určete následující limity.

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = -\frac{1}{6}$

Řešení: Budeme rozvíjet do 3. řádu:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4),$$

tedy máme

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4) - x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{x^3}{3!} + o(x^4)}{x^3} = -\frac{1}{6} + 0.$$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2} = -\frac{1}{2}$

Řešení: Budeme rozvíjet do 2. řádu:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^3)$$

a

$$\ln(1 + y) = y - \frac{y^2}{2} + o(y^2).$$

Dohromady

$$\ln(\cos x) = \left(-\frac{x^2}{2!} + o(x^3)\right) - \frac{\left(-\frac{x^2}{2!} + o(x^3)\right)^2}{2} + o\left(\left(-\frac{x^2}{2!} + o(x^3)\right)^2\right)$$

tedy

$$\ln(\cos x) = -\frac{x^2}{2!} + o(x^3).$$

Pak

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{x^2}{2} + o(x^3)}{x^2} \stackrel{V_{OAL}}{=} -\frac{1}{2} + 0$$

(c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x + 2x^3}{x^2} = 0$

Řešení: Rozvineme do 3. řádu:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4).$$

Pak

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x + 2x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \frac{x^3}{6} + o(x^4) - x + 2x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{11x^3}{6} + o(x^4)}{x^2} \stackrel{V_{OAL}}{=} 0 + 0$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x \sin(x \ln(1+x))}{x^2} = 1$$

Řešení: Rozvineme do 2. řádu:

$$\begin{aligned}\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \\ x \ln(1+x) &= x^2 - \frac{x^3}{2} + o(x^3) \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^3)\end{aligned}$$

Navíc

$$\sin y = y + o(y^2).$$

Dohromady

$$\begin{aligned}\cos x \sin(x \ln(1+x)) &= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^3)\right) \left(x^2 - \frac{x^3}{2} + o(x^3) + o\left(x^2 - \frac{x^3}{2} + o(x^3)\right)\right) \\ &= x^2 + o(x^2)\end{aligned}$$

Celkem pak máme

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x \sin(x \ln(1+x))}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + o(x^2)}{x^2} = 1.$$

$$* e) \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{3/2} (\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x}) = -\frac{1}{4}$$

Řešení:

Protože na rozvíjení v nekonečno nemáme vztahy, provedeme substituci $y = \frac{1}{x}$ (výsledek pak dostaneme větou o limitě složené funkce).

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{3/2} (\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x}) &\rightarrow \lim_{y \rightarrow 0+} y^{-3/2} \left(\sqrt{\frac{1}{y} + 1} + \sqrt{\frac{1}{y} - 1} - 2\sqrt{\frac{1}{y}} \right) = \\ &= \lim_{y \rightarrow 0+} y^{-2} (\sqrt{1+y} + \sqrt{1-y} - 2).\end{aligned}$$

Nyní rozvineme obě odmocniny do druhého řádu

$$\begin{aligned}&= \lim_{y \rightarrow 0+} y^{-2} \left(\left(1 + \frac{1}{2}y + \frac{\frac{1}{2} \cdot (-\frac{1}{2})}{2!}y^2 + o(y^2)\right) + \left(1 - \frac{1}{2}y + \frac{\frac{1}{2} \cdot (-\frac{1}{2})}{2!}y^2 + o(y^2)\right) - 2 \right) = \\ &= \lim_{y \rightarrow 0+} \left(-\frac{1}{8} - \frac{1}{8} + o(1) \right) = -\frac{1}{2} + 0 = -\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

$$* f) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[6]{x^6 + x^5} - \sqrt[6]{x^6 - x^5} = \frac{1}{3}$$

Řešení:

Provedeme substituci $y = \frac{1}{x}$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[6]{x^6 + x^5} - \sqrt[6]{x^6 - x^5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \sqrt[6]{1 + \frac{1}{x}} - x \sqrt[6]{1 - \frac{1}{x}} \rightarrow \lim_{y \rightarrow 0+} \frac{\sqrt[6]{1+y} - \sqrt[6]{1-y}}{y}.$$

Nyní rozvineme odmocniny v čitateli, stačí do prvního řádu

$$= \lim_{y \rightarrow 0+} \frac{(1 + \frac{1}{6}y + o(y)) - (1 - \frac{1}{6}y + o(y))}{y} = \frac{1}{3} + \lim_{y \rightarrow 0+} \frac{o(y)}{y} = \frac{1}{3} + 0 = \frac{1}{3}.$$

(g)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(x^3 - x^2 + \frac{x}{2} \right) e^{1/x} - \sqrt{x^6 + 1} \right] = \frac{1}{6}$$

Řešení: Provedeme substituci $y = \frac{1}{x}$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(x^3 - x^2 + \frac{x}{2} \right) e^{1/x} - \sqrt{x^6 + 1} \right] \rightarrow \lim_{y \rightarrow 0+} \frac{\left[(1 - y + \frac{1}{2}y^2) e^y - \sqrt{1 + y^6} \right]}{y^3} =$$

a nyní rozvineme exponenciálu a odmocninu v čitateli do třetího řádu

$$\begin{aligned} &= \lim_{y \rightarrow 0+} \frac{(1 - y + \frac{1}{2}y^2) (1 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{6} + o(y^3)) - 1 + o(y^6)}{y^3} = \\ &= \lim_{y \rightarrow 0+} \frac{(1 - y + \frac{1}{2}y^2) + (y - y^2 + \frac{1}{2}y^3) + \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{2} + \frac{y^3}{6} + o(y^3) - 1}{y^3} = \\ &= \lim_{y \rightarrow 0+} \frac{\frac{y^3}{6} + o(y^3)}{y^3} = \frac{1}{6} + \lim_{y \rightarrow 0+} \frac{o(y^3)}{y^3} = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

(h)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x - x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right] = \frac{1}{2}$$

Řešení: Provedeme substituci $y = \frac{1}{x}$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x - x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right] \rightarrow \lim_{y \rightarrow 0+} \left[\frac{1}{y} - \frac{1}{y^2} \ln(1 + y) \right] =$$

a nyní rozvineme logaritmus do druhého řádu

$$\begin{aligned} &= \lim_{y \rightarrow 0+} \left[\frac{1}{y} - \frac{1}{y^2} \left(y - \frac{y^2}{2} + o(y^2) \right) \right] = \\ &= \lim_{y \rightarrow 0+} \left[\frac{1}{y} - \frac{1}{y} + \frac{1}{2} + o(1) \right] = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

(i)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg} x} - \sqrt{1 + \sin x}}{x^3} = \frac{1}{4}$$

Řešení:

Budeme hledat rozvoj čitatele do třetího řádu. Je

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

odkud vyplývá

$$\begin{aligned}\sqrt{1 + \operatorname{tg} x} &= 1 + \frac{1}{2} \operatorname{tg} x + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2} - 1)}{2!} \operatorname{tg}^2 x + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2} - 1)(\frac{1}{2} - 2)}{3!} \operatorname{tg}^3 x + o(x^3) = \\ &= 1 + \frac{1}{2} x + \frac{1}{6} x^3 - \frac{1}{8} x^2 + \frac{1}{16} x^3 + o(x^3)\end{aligned}$$

Na druhou stranu

$$\begin{aligned}\sqrt{1 + \sin x} &= 1 + \frac{1}{2} \sin x + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2} - 1)}{2!} \sin^2 x + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2} - 1)(\frac{1}{2} - 2)}{3!} \sin^3 x + o(x^3) = \\ &= 1 + \frac{1}{2} x - \frac{1}{12} x^3 - \frac{1}{8} x^2 + \frac{1}{16} x^3 + o(x^3)\end{aligned}$$

odkud vyplývá, že

$$\sqrt{1 + \operatorname{tg} x} - \sqrt{1 + \sin x} = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{12} \right) x^3 + o(x^3) = \frac{1}{4} x^3 + o(x^3),$$

a tedy

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg} x} - \sqrt{1 + \sin x}}{x^3} = \frac{1}{4}.$$

(j)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(xe^x) - \cos(xe^{-x})}{x^3} = -2$$

Řešení: Zřejmě stačí rozvést čitatel do třetího řádu.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(xe^x) - \cos(xe^{-x})}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{2}x^2e^{2x} - (1 - \frac{1}{2}x^2e^{-2x}) + o(x^3)}{x^3} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{-2x} - e^{2x}}{2x} + \frac{o(x^3)}{x^3} \right) = -2 + 0 = -2.\end{aligned}$$

(k)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2+5x^4} - e^{x^2-3x^4}}{(\cos x - 1)(\cosh x - 1)} = -32$$

Řešení:

Protože platí

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = -\frac{1}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cosh x - 1}{x^2} = \frac{1}{2},$$

pak, existuje-li limita napravo, platí

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2+5x^4} - e^{x^2-3x^4}}{(\cos x - 1)(\cosh x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} -4 \frac{e^{x^2+5x^4} - e^{x^2-3x^4}}{x^4} =$$

stačí tedy rozvést čitatel do čtvrtého stupně. Tak dostaneme

$$= \lim_{x \rightarrow 0} -4 \frac{(1 + x^2 + 5x^4 + \frac{x^4}{2}) - (1 + x^2 - 3x^4 + \frac{x^4}{2}) + o(x^4)}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} -4 \frac{8x^4 + o(x^4)}{x^4} = -32.$$

(1)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh(\operatorname{tg} x) - x}{x^3} = \frac{1}{2}$$

Řešení:

Čitatel musíme rozvést do třetího řádu. Platí, že

$$\begin{aligned} \sinh(\operatorname{tg} x) &= \frac{e^{\operatorname{tg} x} - e^{-\operatorname{tg} x}}{2} \\ &= \frac{1 + \operatorname{tg} x + \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + \frac{\operatorname{tg}^3 x}{6} + o(x^3) - (1 - \operatorname{tg} x + \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} - \frac{\operatorname{tg}^3 x}{6} + o(x^3))}{2} \\ &= \operatorname{tg} x + \frac{\operatorname{tg}^3 x}{6} + o(x^3) \end{aligned}$$

dostáváme tak

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh(\operatorname{tg} x) - x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x + \frac{\operatorname{tg}^3 x}{6} - x + o(x^3)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x^3} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{6} \frac{\operatorname{tg}^3 x}{x^3} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x^3)}{x^3}$$

A dále platí, že

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} x &= \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{x - x^3/3! + o(x^4)}{1 - x^2/2 + o(x^3)} = \\ &= (x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (\frac{x^2}{2} + o(x^3))^k = \\ &= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^3}{2} + o(x^3) = x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) \end{aligned}$$

a proto dostaneme, že

$$\begin{aligned} &\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x^3} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{6} \frac{\operatorname{tg}^3 x}{x^3} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x^3)}{x^3} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3}x^3 + o(x^3)}{x^3} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{6} \frac{\operatorname{tg}^3 x}{x^3} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x^3)}{x^3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + 0 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

(m) Najděte $a, b \in \mathbb{R}$ tak, aby $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - (a + b \cos x) \sin x}{x^4} = 0$.**Řešení:**

Platí

$$\begin{aligned} x - a \sin x - b \sin x \cos x &= x - a \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4) \right) - \frac{b}{2} \left(2x - \frac{(2x)^3}{6} + o(x^4) \right) = \\ &= x - ax + \frac{ax^3}{6} - bx + \frac{4bx^3}{6} + o(x^4). \end{aligned}$$

Aby limita byla nulová, musí být pro každé x z nějakého okolí nuly

$$x - ax - bx = 0 \implies 1 - a - b = 0$$

$$\frac{ax^3}{6} + \frac{4bx^3}{6} = 0 \implies a + 4b = 0$$

Odtud máme $a = -4b$ a $1 + 4b - b = 0$, tedy $b = -\frac{1}{3}$ a $a = \frac{4}{3}$.

$$(n) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^x - 1}{x^n}$$

Řešení:

Je $(1+x)^x = e^{x \ln(1+x)}$ a rozvoj je

$$e^{x \ln(1+x)} = e^{x(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2))} = e^{x^2 - x^3/2 + o(x^3)} = 1 + x^2 - \frac{x^3}{2} + o(x^3) = 1 + x^2 + o(x^2),$$

tudíž

$$(1+x)^x - 1 = e^{x \ln(1+x)} - 1 = x^2 + o(x^2),$$

hledané $n = 2$ a platí

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^x - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + o(x^2)}{x^2} = 1.$$

$$(o) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln^2(1 + \sin x) - \ln^2(1 + \arcsin x)}{x^n}$$

Řešení:

Porovnáme rozvoje funkcí $\sin x$ a $\arcsin x$ a zjistíme první člen, kde se liší. Ten bude určující.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3), \quad \arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + o(x^3).$$

Odtud vidíme, že pravděpodobně budeme muset rozvíjet do třetího řádu. Je

$$\ln(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + o(y^3),$$

a proto

$$\begin{aligned} \ln(1+x \pm \frac{x^3}{6} + o(x^3)) &= \left(x \pm \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) - \frac{1}{2} \left(x \pm \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2 + \frac{1}{3} \left(x \pm \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^3 + o(x^3) \\ &= x - \frac{1}{2}x^2 \pm \frac{x^3}{6} + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3), \end{aligned}$$

z čehož vyplývá, že

$$\ln^2(1+x \pm \frac{x^3}{6} + o(x^3)) = x^2 - x^3 + \frac{1}{4}x^4 \pm \frac{x^4}{3} + o(x^4).$$

Není třeba pokračovat do vyšších mocnin, hledali jsme první člen, kde se rozvoje budou lišit. Odtud vyplývá

$$\begin{aligned} \ln^2(1+\sin x) - \ln^2(1+\arcsin x) &= \ln^2(1+x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)) - \ln^2(1+x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)) = \\ &= \left(x^2 - x^3 + \frac{1}{4}x^4 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)\right) - \left(x^2 - x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{x^4}{3} + o(x^4)\right) = -\frac{2}{3}x^4 + o(x^4). \end{aligned}$$

Odtud vyplývá, že hledané $n = 4$ a platí

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln^2(1 + \sin x) - \ln^2(1 + \arcsin x)}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{2}{3}x^4 + o(x^4)}{x^4} = -\frac{2}{3}.$$

Zkouškové příklady

2. (a) Nalezněte Taylorův polynom funkce $f(x) = \arctan(\sin x) - \sin\left(x - \frac{1}{3}x^3\right)$ řádu 5 v bodě $x = 0$ a spočtěte

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{(\arcsin x)(\cos x) - \arctan x}$$

Řešení: Zdroj: <http://www.karlin.mff.cuni.cz/~rokyta/vyuka/0809/ls/ma/index.html>

Máme

$$\begin{aligned}\arctan x &= x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + o(x^5), \\ \sin x &= x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^5).\end{aligned}$$

Tedy

$$\begin{aligned}\arctan(\sin x) &= x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^5) - \frac{1}{3}\left(x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^5)\right)^3 \\ &\quad + \frac{1}{5}\left(x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^5)\right)^5 + o\left(\left(x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^5)\right)^5\right) \\ &= x - \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{8}x^5 + o(x^5).\end{aligned}$$

Dále

$$\begin{aligned}\sin\left(x - \frac{1}{3}x^3\right) &= \left(x - \frac{1}{3}x^3\right) - \frac{1}{6}\left(x - \frac{1}{3}x^3\right)^3 + \frac{1}{120}\left(x - \frac{1}{3}x^3\right)^5 + o\left(x - \frac{1}{3}x^3\right)^5 \\ &= x - \frac{1}{2}x^3 + \frac{7}{40}x^5 + o(x^5).\end{aligned}$$

Dohromady

$$T_5^{f,0} = \frac{1}{5}x^5.$$

Dále rozvineme jmenovatele. Platí

$$\begin{aligned}\arcsin x &= x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + o(x^5), \\ \cos x &= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^5).\end{aligned}$$

Tedy

$$\begin{aligned}\arcsin x \cdot \cos x - \arctan x &= \left(x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + o(x^5)\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^5)\right) \\ &\quad - \left(x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + o(x^5)\right) \\ &= -\frac{1}{6}x^5 + o(x^5).\end{aligned}$$

Pro limitu pak máme

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{5}x^5 + o(x^5)}{-\frac{1}{6}x^5 + o(x^5)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{5} + \frac{o(x^5)}{x^5}}{-\frac{1}{6} + \frac{o(x^5)}{x^5}} = -\frac{6}{5}$$

(b) Určete hodnoty koeficientu $a \in \mathbb{R}$, pro které platí

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x\sqrt{1-2x} - x\sqrt[3]{1-3x}}{x - a \sin \frac{x}{a}} = 1.$$

Řešení: Rozvineme odmocniny do 2. řádu

$$\begin{aligned}\sqrt{1-2x} &= 1 + \frac{1}{2}(-2x) + \frac{\frac{1}{2} \cdot -\frac{1}{2}}{2}(-2x)^2 + o((-2x)^2) \\ \sqrt[3]{1-3x} &= 1 + \frac{1}{3}(-3x) + \frac{\frac{1}{3} \cdot -\frac{2}{3}}{2}(-3x)^2 + o((-3x)^2)\end{aligned}$$

Dohromady pro čitatele máme

$$x\sqrt{1-2x} - x\sqrt[3]{1-3x} = \frac{x^3}{2} + o(x^3).$$

Pro jmenovatele je pro $a \neq 0$

$$x - a \sin \frac{x}{a} = x - a \left(\frac{x}{a} - \frac{1}{6} \frac{x^3}{a^3} + o\left(\frac{x^3}{a^3}\right) \right) = \frac{x^3}{6a^2} + o(x^4)$$

Limita:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x\sqrt{1-2x} - x\sqrt[3]{1-3x}}{x - a \sin \frac{x}{a}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^3}{2} + o(x^3)}{\frac{x^3}{6a^2} + o(x^4)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} + \frac{o(x^3)}{x^3}}{\frac{1}{6a^2} + \frac{o(x^4)}{x^3}} = 3a^2$$

Tedy řešíme rovnici $3a^2 = 1$, odtud

$$a = \pm \sqrt{\frac{1}{3}}$$

(c) Rozviňte funkce $e^{\cos x}$ do Taylorova polynomu čtvrtého řádu se středem v 0 a spočtěte limitu

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\cos x} - \frac{e}{2}(e^x + e^{-x}) + ax^2}{x^4}$$

(pokud existuje) v závislosti na parametru $a \in \mathbb{R}$.

Řešení: Rozviňme do 4. řádu:

$$\begin{aligned}\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^2) \\ e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4).\end{aligned}$$

Odtud

$$\begin{aligned}
 e^{-x} &= 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) \\
 e^{\cos x} &= e \cdot e^{\cos x - 1} \\
 &= e \left(1 + \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) \right) + \frac{\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) \right)^2}{2} \right. \\
 &\quad + \frac{\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) \right)^3}{6} + \frac{\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) \right)^4}{24} \\
 &\quad \left. + o \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) \right)^4 \right) \\
 &= e - \frac{e}{2}x^2 + \frac{e}{6}x^4 + o(x^4)
 \end{aligned}$$

Dohromady máme

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\cos x} - \frac{e}{2}(e^x + e^{-x}) + ax^2}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(a - e)x^2 + \frac{e}{8}x^4 + o(x^4)}{x^4}$$

Pro $a = e$ máme

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{e}{8}x^4 + o(x^4)}{x^4} = \frac{e}{8}$$

Pro $a > e$ je dle věty o nevlastní limitě podílu

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(a - e)x^2 + \frac{e}{8}x^4 + o(x^4)}{x^4} = \infty.$$

Analogicky pro $a < e$ je

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(a - e)x^2 + \frac{e}{8}x^4 + o(x^4)}{x^4} = -\infty.$$

(d) Určete všechny hodnoty koeficientu $a \in \mathbb{R}$, pro které existuje vlastní limita

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\arctan x) - \cos(\sin x) + ax^3}{x^4}$$

Pro tyto hodnoty a limitu vypočítejte.

Řešení: Platí

$$\begin{aligned}
 \arctan x &= x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^4), \\
 \sin x &= x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4), \\
 \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^2).
 \end{aligned}$$

Odtud

$$\begin{aligned}\cos(\arctan x) &= 1 - \frac{\left(x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^4)\right)^2}{2} + \frac{\left(x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^4)\right)^4}{24} + o\left(x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^4)\right)^2, \\ &= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + o(x^4) \\ \cos(\sin x) &= 1 - \frac{\left(x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4)\right)^2}{2} + \frac{\left(x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4)\right)^4}{24} + o\left(x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4)\right)^2. \\ &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + o(x^4)\end{aligned}$$

Pro limitu tedy máme

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\arctan x) - \cos(\sin x) + ax^3}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax^3 + \frac{x^4}{6} + o(x^4)}{x^4}$$

Aby byla limita vlastní, musí být $a = 0$. Pak dostáváme

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^4}{6} + o(x^4)}{x^4} = \frac{1}{6}$$

(e) Určete koeficienty $a, b \in \mathbb{R}$ tak, aby limita

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(ax) + x \arctan(bx) - b}{x^4}$$

existovala vlastní. Pro tyto hodnoty a, b limitu vypočítejte.

Řešení: Pro $a, b \neq 0$ máme rozvoj

$$\begin{aligned}\cos ax &= 1 - \frac{a^2 x^2}{2} + \frac{a^4 x^4}{24} + o(x^2). \\ \arctan bx &= bx - \frac{1}{3}b^3 x^3 + o(x^4),\end{aligned}$$

Limita pak je tvaru

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(ax) + x \arctan(bx) - b}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - b) + \left(b - \frac{a^2}{2}\right)x^2 + \frac{a^4 - 8b^3}{24}x^4 + o(x^4)}{x^4}$$

Aby limita existovala vlastní, musí platit

$$\begin{aligned}1 - b &= 0 \\ b - \frac{a^2}{2} &= 0,\end{aligned}$$

tedy $b = 1$, $a = \pm\sqrt{2}$.

Pro tyto hodnoty pak je

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{4-8}{24}x^4 + o(x^4)}{x^4} = -\frac{1}{6}$$

Dále, uvažujme $a = 0$, $b \neq 0$. Pak

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x \arctan(bx) - b}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - b) + bx^2 - \frac{b^3}{3}x^4 + o(x^4)}{x^4}$$

Aby limita existovala vlastní, musí platit

$$\begin{aligned} 1 - b &= 0 \\ b &= 0, \end{aligned}$$

což není možné.

Nechť nyní $a \neq 0$, $b = 0$. Pak

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(ax)}{x^4} = \infty,$$

což nesplňuje požadavek na vlastní limitu.

Poslední kombinace $a = b = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^4} = \infty,$$

což také nesplňuje podmínku vlastní limity.

Závěr: Pro $b = 1$, $a = \pm\sqrt{2}$ vyjde limita rovna $-\frac{1}{6}$.

Odhady

3. Pomoci Taylorova polynomu 1. stupně určete přibližné hodnoty následujících výrazů (a porovnejte s kalkulačkou)

(a) $\sqrt[3]{e}$

Řešení:

$$\approx 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$$

kalkulačka

$$1,39561$$

(b) $\arcsin 0,2$ **Řešení:**

$$\approx 0,2$$

kalkulačka

$$0,201$$

(c) $(1,04)^4$ **Řešení:**

$$\approx 1 + 4 \cdot 0,04 = 1,16$$

kalkulačka

$$1,1699$$

(d) $\ln(1,02)$ **Řešení:**

$$\approx 0,02$$

kalkulačka

$$0,01980$$

(e) $\arctan 1, 1$ **Řešení:**

$$\approx 1, 1$$

kalkulačka

$$0,83298$$

(f) $\sin(-0,22)$ **Řešení:**

$$\approx -0,22$$

kalkulačka

$$-0,2182$$

4. Vypočítejte přibližnou hodnotu čísla e s chybou menší než 0,001.

Řešení: Příklad i s řešením máme od: https://is.muni.cz/do/rect/el/estud/prif/js12/m_analyza/web/index.html

Aplikujeme Větu o Lagrangeově tvaru zbytku. Pracujeme s funkcí $f = e^x$, kterou rozvíjíme v bodě $a = 0$ a budeme dosazovat za $x = 1$. Pracujeme tedy s intervalem $[0, 1]$. Uvažujme nějaké $n \in \mathbb{N}$. Protože $e^x \in \mathcal{C}^{n+1}$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, jsou podmínky splněny a existuje $c \in [0, 1]$ takové, že

$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)(x-a)^{n+1}.$$

Konkrétně

$$e^1 - T_n^{e^x,0}(1) = \frac{1}{(n+1)!} e^c (1-0)^{n+1} = \frac{e^c}{(n+1)!}.$$

Nejhorší situace (největší možná chyba) nastává pro $c = 1$, tedy budeme odhadovat výraz

$$\frac{e}{(n+1)!}$$

Aplikujeme odhad $e < 3$ a dostáváme nerovnici

$$\frac{3}{(n+1)!} < 0,001$$

Tedy

$$3000 < (n+1)!$$

Ta je splněna pro $n \geq 6$.

Tedy při aproximaci čísla e potřebujeme Taylorův polynom alespoň stupně 6. Dostáváme

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} = 2,718055556.$$

5. Pro jaké hodnoty platí přibližný vztah $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2}$ s přesností 0,0001?

Řešení: Příklad i s řešením máme od: https://is.muni.cz/do/rect/el/estud/prif/js12/m_analyza/web/index.html

Aplikujeme Větu o Lagrangeově tvaru zbytku. Pracujeme s funkcí $f = \cos x$, kterou rozvíjíme v bodě $a = 0$ do stupně $n = 3$ (rozvoj pro $n = 2$ a $n = 3$ je stejný). Uvažujme

$x > 0$. Pracujeme tedy s intervalem $[0, x]$. Protože $\cos x \in \mathcal{C}^4$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, jsou podmínky splněny a existuje $c \in [0, x]$ takové, že

$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)(x-a)^{n+1}.$$

Konkrétně

$$\cos x - 1 + \frac{x^2}{2} = \frac{1}{(4)!} \cos(c)(x-0)^4 \leq \frac{x^4}{24}.$$

Řešíme tedy nerovnici

$$\frac{x^4}{24} \leq 0,0001.$$

Tedy

$$x^4 \leq 0,0024.$$

To platí cca pro $x < 0,222$. Protože funkce $\cos x$ je sudá, lze pro $x < 0$ aplikovat stejný postup.

Dohromady

$$x \in (-0,222, 0,222).$$

Tedy při aproximaci čísla e potřebujeme Taylorův polynom alespoň stupně 6. Dostáváme

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} = 2,71805556.$$

6. Určete maximální chybu, které se dopustíme, nahradíme-li na intervalu $(0, 9; 1, 1)$ funkci $\arctan x$ Taylorovým polynomem stupně 2 v bodě $x_0 = 1$.

Řešení: Příklad i s řešením máme od: https://is.muni.cz/do/rect/el/estud/prif/js12/m_analyza/web/index.html

Aplikujeme Větu o Lagrangeově tvaru zbytku. Pracujeme s funkcí $f = \arctan x$, kterou rozvíjíme v bodě $a = 1$ do stupně $n = 2$. Uvažujme $1 < x < 1.1$. Pracujeme tedy s intervalem $[1, x]$. Protože $\arctan x \in \mathcal{C}^3$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, jsou podmínky splněny a existuje $c \in [1, x]$ takové, že

$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)(x-a)^{n+1}.$$

Navíc platí

$$\begin{aligned} f' &= \frac{1}{1+x^2} \\ f'' &= \frac{-2x}{(1+x^2)^2} \\ f''' &= \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3} \end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned} f(1) &= \frac{\pi}{4} \\ f'(1) &= \frac{1}{2} \\ f''(1) &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Tedy

$$T_2^{\arctan x, 1} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{4}(x-1)^2$$

Pro odhad chyby pro $x \in [1, 1.1]$ tedy máme

$$\begin{aligned} \arctan x - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{4}(x-1)^2 &= \frac{1}{3!} \frac{6c^2 - 2}{(1+c^2)^3} (x-1)^3 \leq \frac{1}{3!} \frac{6c^2 + 2}{(1+1^2)^3} (1.1-1)^3 \\ &\leq \frac{1}{6} \cdot \frac{6 \cdot 1.1^2 + 2}{8} \cdot \frac{1}{1000} \doteq 0.19292 \cdot 0.001 \end{aligned}$$

Analogicky pro $x \in [0.9, 1]$ je

$$\begin{aligned} \left| \arctan x - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{4}(x-1)^2 \right| &= \left| \frac{1}{3!} \frac{6c^2 - 2}{(1+c^2)^3} (x-1)^3 \right| \leq \frac{1}{3!} \frac{6c^2 + 2}{(1+0.9^2)^3} |0.9-1|^3 \\ &\leq \frac{1}{6} \cdot \frac{6 \cdot 1^2 + 2}{1.81^3} \cdot \frac{1}{1000} \doteq 0.22486 \cdot 0.001 \end{aligned}$$