



23. cvičení – Taylor a limity

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Algoritmus

1. Trochu jako u L'Hospitala: Pokud je to nutné, převedeme na **jeden zlomek**. Pokud to lze, použijeme **známé limity** - tím zjednodušíme výraz.
2. Odhadneme, do jakého **řádu** budeme rozvíjet. Náповěda:
 - (a) Stupeň ve jmenovateli.
 - (b) Rozvíjíme do takového stupně, aby nám zbyla nějaká x (nesmí se nám všechno „požrat“).
3. **Rozvineme**. Nezapomeneme na opatrnou práci s óčky.
4. **Vytkneme** nejvyšší člen. Dopoteme.

Příklady

1. Pomocí Taylorova rozvoje určete následující limity.

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sin x - 1}{x^2}$

(h) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x + a^{-x} - 2}{x^2}, a > 0$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3}$

(i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{x} - \cotg x \right)$

(c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-x^2/2}}{x^4}$

(j) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tg x - x}{x - \sin x}$

(d) $\clubsuit \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right)$

(k) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(\sin x - \tg x) + x^3}{(\exp x - 1)(\exp(-x^2) - 1)^2}$

(e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin x) - x\sqrt[3]{1-x^2}}{x^5}$

(l) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \arcsin x - \tg x - x}{2 \sin x - \arctan x - x}$

(f) $\clubsuit \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2+x} - \sin x + 3 \cos x - 4}{\arctan^3 x}$

(m) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (\cos x)^{\sin x}}{x^3}$

(g) $\clubsuit \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{x^2} - 1)(\sin x - x)^2}{(\cos x - 1)^2 \sin^4 x}$

Bonus

2. $\clubsuit$ Určete, zda je pravda: Má - li funkce derivace všech řádů a Taylorova řada konverguje, tak už konverguje k původní funkci.
3. $\heartsuit$ Zjistěte, zda je 0 inflexním bodem funkce $\sin x + \sinh x$.
4. $\clubsuit$ Zjistěte, pro která $C \in \mathbb{R}$ má funkce $f(x) = \cos x - e^{-x^2/2} + Cx^4$ lokální maximum v bodě 0.

(1d) Pře na společný jmenovatel.	(1f) Nejprve použijeme známou limitu $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\arctan x} = 1$.
(1g) Nejprve použijeme známé limity.	(2) Uvažujeme $\left. \begin{matrix} e^{-1/x^2}, \\ x \neq 0, \\ 0, \end{matrix} \right\} = f(x)$
(3) Pře 2x dderivujeme, pak rozvíjíme do Taylora v 0. Vytkneme x^3 a zkusíme znát 2. derivace.	(4) Rozvíjíme do Taylora, vytkneme x^4 a zkusíme znát 2. derivace.