



17. cvičení – derivace 2

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Příklady

Spočtete derivace (příp. jednostranné derivace) následujících funkcí

1. Zdroje: <https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~pick/analyza.pdf>
<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~bouchala/Vyuka/MFF-NMMA101-1920/Cv22%20-%20Derivace%202.pdf>
<https://users.math.cas.cz/~vanzura/SBIR8.PDF>
<https://matematika.cuni.cz/ikalkulus.html>

(a) $f(x) = \arccos(1 - x^2)$

Řešení: Příklad i s řešením máme z: <https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~pick/analyza.pdf>

i. Definiční obor:

$$-1 \leq 1 - x^2 \leq 1$$

Tedy

$$\begin{aligned} -2 &\leq -x^2, & -x^2 &\leq 0 \\ x^2 &\leq 2, & 0 &\leq x^2 \\ |x| &\leq \sqrt{2} \\ x &\in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \end{aligned}$$

Dohromady:

$$D_f = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$$

ii. Derivaci složené funkce lze použít tam, kde

$$-1 < 1 - x^2 < 1$$

což jsou intervaly $(-\sqrt{2}, 0)$ a $(0, \sqrt{2})$.

Tedy pro $x \in (-\sqrt{2}, 0)$ a $x \in (0, \sqrt{2})$ můžeme zderivovat:

$$f' = \frac{-1}{\sqrt{1 - (1 - x^2)^2}}(-2x) = \frac{2x}{\sqrt{2x^2 - x^4}} = \frac{2x}{\sqrt{x^2(2 - x^2)}} = \frac{2x}{|x|\sqrt{2 - x^2}}$$

iii. Problematické body: $-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}$.

Protože funkce f je v těchto bodech spojitá (příp. spojitá zleva/zprava), můžeme derivaci počítat pomocí věty o limitě derivací. Tedy máme

$$\begin{aligned}
f'_+(0) &= \lim_{x \rightarrow 0+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{2x}{|x|\sqrt{2-x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{2x}{x\sqrt{2-x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{2}{\sqrt{2-x^2}} \\
&= \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \\
f'_-(0) &= \lim_{x \rightarrow 0-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{2x}{|x|\sqrt{2-x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{2x}{-x\sqrt{2-x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{-2}{\sqrt{2-x^2}} \\
&= \frac{-2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}
\end{aligned}$$

Tedy derivace $f'(0)$ neexistuje.
Dále (z Věty 4.2.7 ze skript)

$$\begin{aligned}
f'_+(-\sqrt{2}) &= \lim_{x \rightarrow 0+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -\sqrt{2}+} \frac{2x}{|x|\sqrt{2-x^2}} = \lim_{x \rightarrow -\sqrt{2}+} \frac{2x}{-x\sqrt{2-x^2}} = \lim_{x \rightarrow -\sqrt{2}+} \frac{-2}{\sqrt{2-x^2}} \\
&= -\infty \\
f'_-(\sqrt{2}) &= \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}-} \frac{2x}{|x|\sqrt{2-x^2}} = \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}-} \frac{2x}{x\sqrt{2-x^2}} = \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}-} \frac{2}{\sqrt{2-x^2}} \\
&= \infty
\end{aligned}$$

Tedy: $D_{f'} = (-\sqrt{2}, 0) \cup (0, \sqrt{2})$.

$$(b) \quad f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{\sqrt[3]{x}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Řešení: Příklad i s řešením máme z: <https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~pic k/analyza.pdf>

i. Definiční obor:

$$D_f = \mathbb{R}.$$

ii. Aritmetiku derivací a derivaci složené funkce lze použít tam, kde

$$x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty).$$

Tedy pro $x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ máme

$$f' = 2x \sin \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + x^2 \cos \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \cdot \frac{-1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x^4}}$$

iii. Problematické body: 0.

Derivaci spočteme z definice. (Věta o limitě omezené a mizející.)

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \sin \frac{1}{\sqrt[3]{h}} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h \sin \frac{1}{\sqrt[3]{h}} = 0$$

Tedy: $D_{f'} = \mathbb{R}$.

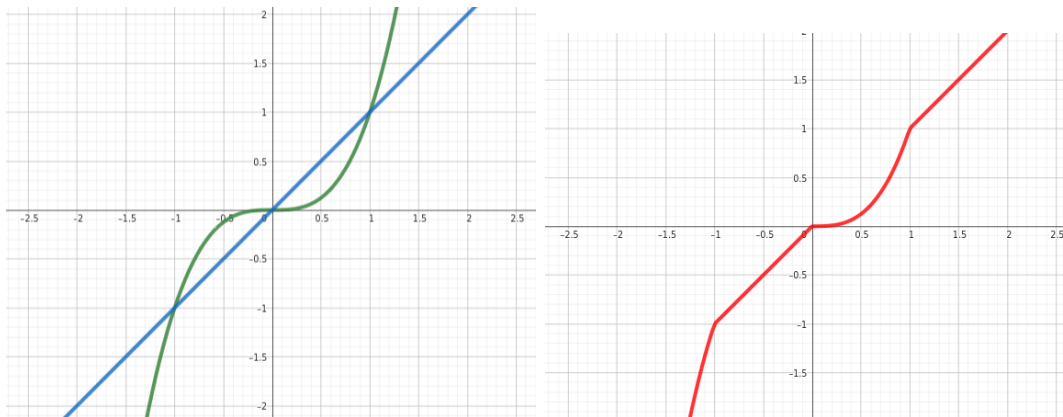
(c) $f(x) = \min\{x, x^3\}$

Řešení: Příklad i s řešením máme z: <https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~pik/k/analyza.pdf>

i. Definiční obor:

$$D_f = \mathbb{R}.$$

Funkci lze načrtnout:



Můžeme tedy psát

$$f(x) = \begin{cases} x^3, & x \in (-\infty, -1), \\ -1, & x = -1, \\ x, & x \in (-1, 0), \\ 0, & x = 0, \\ x^3, & x \in (0, 1), \\ 1, & x = 1, \\ x, & x \in (1, \infty), \end{cases}$$

ii. Na otevřených intervalech můžeme zderivovat. Můžeme tedy psát

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2, & x \in (-\infty, -1), \\ 1, & x \in (-1, 0), \\ 3x^2, & x \in (0, 1), \\ 1, & x \in (1, \infty), \end{cases}$$

iii. Problematické body: $-1, 0, 1$.

Protože funkce je spojitá (vizte předchozí cvičení), můžeme použít větu o limitě derivací. Tedy

$$\begin{aligned}
f'_+(0) &= \lim_{x \rightarrow 0+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} 3x^2 = 0 \\
f'_-(0) &= \lim_{x \rightarrow 0-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} 1 = 1 \\
f'_+(-1) &= \lim_{x \rightarrow -1+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -1+} 1 = 1 \\
f'_-(-1) &= \lim_{x \rightarrow -1-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -1-} 3x^2 = 3 \\
f'_+(1) &= \lim_{x \rightarrow 1+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} 1 = 1 \\
f'_-(1) &= \lim_{x \rightarrow 1-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} 3x^2 = 3
\end{aligned}$$

Tedy derivace v bodech $-1, 0, 1$ neexistují a $D_{f'} = (-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, 1) \cup (1, \infty)$.

(d) $f(x) = x^2 e^{-|x-1|}$

Řešení: Příklad i s řešením máme z: <https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~bouchala/Vyuka/MFF-NMMA101-1920/Cv22%20-%20Derivace%202.pdf>

i. Definiční obor:

$$D_f = \mathbb{R}.$$

Můžeme psát

$$f(x) = \begin{cases} x^2 e^{-(x-1)}, & x \in (1, \infty), \\ 1, & x = 1, \\ x^2 e^{(x-1)}, & x \in (-\infty, 1), \end{cases}$$

ii. Na otevřených intervalech můžeme zderivovat. Tedy

$$f'(x) = \begin{cases} 2xe^{-(x-1)} + x^2 e^{-(x-1)}(-1), & x \in (1, \infty), \\ 2xe^{(x-1)} + x^2 e^{(x-1)} \cdot 1, & x \in (-\infty, 1), \end{cases}$$

iii. Problematické body: 1.

Protože funkce je spojitá, můžeme použít větu o limitě derivací. Tedy

$$\begin{aligned}
f'_+(1) &= \lim_{x \rightarrow 1+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} 2xe^{-(x-1)} + x^2 e^{-(x-1)}(-1) = 2 - 1 = 1 \\
f'_-(1) &= \lim_{x \rightarrow 1-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} 2xe^{(x-1)} + x^2 e^{(x-1)} \cdot 1 = 2 + 1 = 3
\end{aligned}$$

Tedy derivace v bodě 1 neexistuje a $D_{f'} = (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$.

(e) $f(x) = \sqrt[3]{\sin x}$

Řešení: Příklad i s řešením máme z: <https://matematika.cuni.cz/ikalkulus.html>

i. Definiční obor:

$$D_f = \mathbb{R}$$

ii. Derivaci složené funkce lze použít tam, kde

$$\sin x \neq 0$$

což jsou intervaly $(0 + k\pi, \pi + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Tedy pro $x \in (0 + k\pi, \pi + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, můžeme zderivovat:

$$f' = \frac{1}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{\sin^2 x}} \cos x$$

iii. Problematické body: $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Protože funkce f je v těchto bodech spojitá, můžeme derivaci počítat pomocí věty o limitě derivací.

Protože $\cos(k\pi) = (-1)^k$, budeme rozlišovat sudá a lichá k . Pro sudé $k \in \mathbb{Z}$ máme (z věty o podílu nulové funkce)

$$f'_+(k\pi) = \lim_{x \rightarrow k\pi} f'(x) = \lim_{x \rightarrow k\pi} \frac{1}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{\sin^2 x}} \cos x = \infty$$

Pro liché $k \in \mathbb{Z}$ máme (z věty o podílu nulové funkce)

$$f'_+(k\pi) = \lim_{x \rightarrow k\pi} f'(x) = \lim_{x \rightarrow k\pi} \frac{1}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{\sin^2 x}} \cos x = -\infty$$

Tedy: $D_{f'} = D_f$.

(f) $f(x) = \arcsin \frac{1-x^2}{1+x^2}$

Řešení: Příklad i s řešením máme z: <https://users.math.cas.cz/~vanzura/SBIR8.PDF>

i. Definiční obor:

$$-1 \leq \frac{1-x^2}{1+x^2} \leq 1$$

Tedy

$$\begin{aligned} -1 - x^2 &\leq 1 - x^2, & 1 - x^2 &\leq 1 + x^2 \\ -1 &\leq 1, & 0 &\leq 2x^2 \end{aligned}$$

Dohromady:

$$D_f = \mathbb{R}$$

ii. Derivaci složené funkce a aritmetiku derivací lze použít tam, kde

$$-1 < \frac{1-x^2}{1+x^2} < 1$$

což jsou intervaly $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$.

Tedy pro $x \in (-\infty, 0)$ a $x \in (0, \infty)$ můžeme zderivovat:

$$\begin{aligned} f' &= \frac{-1}{\sqrt{1 - \left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}} \cdot \frac{-2x(1+x^2) - (1-x^2)2x}{(1+x^2)^2} \\ &= \frac{-1}{\sqrt{\frac{1+2x^2+x^4-1+2x^2-x^4}{(1+x^2)^2}}} \cdot \frac{-4x}{(1+x^2)^2} \\ &= \frac{1+x^2}{2|x|} \cdot \frac{-4x}{(1+x^2)^2} \\ &= \frac{-2x}{|x|(1+x^2)} \end{aligned}$$

iii. Problematické body: 0.

Protože funkce f je v tomto bodě spojitá, můžeme derivaci počítat pomocí věty o limitě derivací. Tedy máme

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{-2x}{|x|(1+x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{-2x}{x(1+x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{-2}{(1+x^2)} = -2$$
$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{-2x}{|x|(1+x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{-2x}{-x(1+x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{2}{(1+x^2)} = 2$$

Tedy derivace $f'(0)$ neexistuje.

Tedy: $D_{f'} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

Zkouškové příklady

2. (a) $f(x) = \operatorname{sgn}(x^2 + x - 2)(\arctan(x + 2))^4$

Řešení: Příklad i s řešením máme od prof. Spurného <https://www.karlin.mff.cuni.cz/~spurny/pages/ma1.php>

i. Definiční obor:

$$D_f = \mathbb{R}$$

Platí

$$x^2 + x - 2 = (x + 2)(x - 1)$$

Tedy můžeme psát

$$f(x) = \begin{cases} (\arctan(x + 2))^4, & x \in (1, \infty), \\ 0, & x = 1, \\ -(\arctan(x + 2))^4, & x \in (-2, 1), \\ 0, & x = -2, \\ (\arctan(x + 2))^4, & x \in (-\infty, -2). \end{cases}$$

ii. Na otevřených intervalech můžeme zderivovat. Tedy

$$f'(x) = \begin{cases} 4 \arctan^3(x + 2) \cdot \frac{1}{1+(x+2)^2}, & x \in (1, \infty), \\ -4 \arctan^3(x + 2) \cdot \frac{1}{1+(x+2)^2}, & x \in (-2, 1), \\ 4 \arctan^3(x + 2) \cdot \frac{1}{1+(x+2)^2}, & x \in (-\infty, -2). \end{cases}$$

iii. Problematické body: $-2, 1$.

Protože funkce f je v bodě -2 spojitá, můžeme derivaci počítat pomocí věty o limitě derivací. Tedy máme

$$f'_+(-2) = \lim_{x \rightarrow -2+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -2+} -4 \arctan^3(x + 2) \cdot \frac{1}{1 + (x + 2)^2} = 0$$
$$f'_-(-2) = \lim_{x \rightarrow -2-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -2-} 4 \arctan^3(x + 2) \cdot \frac{1}{1 + (x + 2)^2} = 0$$

Tedy derivace $f'(-2) = 0$.

Derivaci v bodě 1 budeme počítat z definice. (Použijeme větu o limitě při dělení 0.)

$$f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{(\arctan(x - 2))^4 - 0}{x - 1} = \infty$$

$$f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{-(\arctan(x - 2))^4 - 0}{x - 1} = \infty$$

Tedy derivace $f'(1) = \infty$.

Tedy: $D_{f'} = (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$.

Příklady (2b)-(2g) i s řešením máme od doc. Zeleného: <https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~zeleny/fsv/mat1/pisemky/m1-97-98.pdf>

$$(b) \quad f(x) = \begin{cases} \arctan(\tan^2 x), & x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ \frac{\pi}{2}, & x = \frac{\pi}{2} + k\pi. \end{cases}$$

$$(c) \quad f(x) = \sqrt{1 - e^{-x^2}}$$

$$(d) \quad f(x) = \max \left\{ \min \left\{ \cos x, \frac{1}{2} \right\}, -\frac{1}{2} \right\}$$

$$(e) \quad f(x) = \arccos \frac{1}{1 + x^2}$$

$$(f) \quad f(x) = \begin{cases} x^2 \left(\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} \right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

$$(g) \quad f(x) = \max\{x + 4 \arctan(\sin x), x\}$$

Bonus

$$3. \text{ Uvažujte funkce } f(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn} x, & x \neq 0, \\ -\frac{3}{4}, & x = 0, \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} -\operatorname{sgn} x, & x \neq 0, \\ \frac{1}{2}, & x = 0. \end{cases}$$

Ukažte, že

(a) $f'(0)$ a $g'(0)$ existují, ale $(f + g)'(0)$ neexistuje.

(b) výraz $f'(0)g(0) + f(0)g'(0)$ má smysl, ale $(fg)'(0)$ neexistuje.

$$4. \text{ Necht } f(x) = 1 \text{ a } g(x) = \begin{cases} -\operatorname{sgn} x, & x \neq 0, \\ \frac{1}{2}, & x = 0. \end{cases}$$

Ukažte, že výraz $\frac{f'(0)g(0) - f(0)g'(0)}{g^2(0)}$ má smysl, ale $\left(\frac{f}{g}\right)'(0)$ neexistuje.

$$5. \text{ Necht } f(y) = |y| \text{ a } g(x) = \begin{cases} -\operatorname{sgn} x, & x \neq 0, \\ \frac{1}{2}, & x = 0. \end{cases}$$

Ukažte, že výraz $\frac{f'(g(0))g'(0)}{g^2(0)}$ má smysl, ale $(f(g))'(0)$ neexistuje.

6. Najděte taková $a, b \in \mathbb{R}$, aby funkce byla diferencovatelná (vlastní dce) v každém $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} ax + b, & x \leq -1 \\ ax^3 + x + 2b, & x > -1. \end{cases}$$

7. Kde dělá tazatel chybu?

Pochází z: <https://math.stackexchange.com/questions/1532014/how-to-apply-the-definition-of-a-derivative-with-a-piecewise-function>

Z (1) a (2) plyne $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(n+1)}{n^2} = 0$. Odtud, z (3) a z věty o aritmetice limit plyne

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 + \sin(n+1)) \cdot (\sqrt{n^4 + 2} - \sqrt{n^4 + 1}) = \frac{1}{2}.$$

Příklad B2 : Použijeme Leibnizova kritéria. Ověříme jeho předpoklady:

- (1) řada má požadovaný tvar,
- (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{3} - 1) = 0$,
- (3) $\forall n \in \mathbb{N} : \sqrt[n]{3} - 1 \geq \sqrt[n+1]{3} - 1$ (lze snadno odvodit ze zřejmé nerovnosti $3^{n+1} \geq 3^n$, $n \in \mathbb{N}$).

Řada tedy konverguje.

Příklad B3 : Pišme

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 2x} - e^{\arcsin x}}{\operatorname{tg} x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 2x} - e^{\arcsin x}}{x} \cdot \frac{x}{\operatorname{tg} x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 2x} - e^{\arcsin x}}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\operatorname{tg} x}.$$

Víme, že $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\operatorname{tg} x} = 1$. Zabývejme se teď první limitou ve výše uvedeném součinu limit.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 2x} - e^{\arcsin x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 2x} - 1}{\sin 2x} \cdot \frac{\sin 2x}{x} - \frac{e^{\arcsin x} - 1}{\arcsin x} \cdot \frac{\arcsin x}{x} = 2 - 1 = 1.$$

Použili jsme

- (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$,
- (2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$,
- (3) $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y} = 1$,
- (4) $\sin$ je prostá funkce na jistém okolí 0,
- (5) $\arcsin$ je prostá funkce,
- (6) $x \mapsto 2x$ je prostá funkce,
- (7) větu o limitě složené funkce ve verzi s podmínkou (P1),
- (8) větu o aritmetice limit.

Dohromady tedy máme

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 2x} - e^{\arcsin x}}{\operatorname{tg} x} = 1.$$

Příklad B4 : Funkce arctg i tg mají derivace všude ve svém definičním oboru. Máme tedy

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^4 x} \cdot 2 \operatorname{tg} x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}; \quad x \neq \pi/2 + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z};$$

po úpravě dostaneme

$$f'(x) = \frac{2 \sin x \cos x}{\cos^4 x + \sin^4 x}; \quad x \neq \pi/2 + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Platí také $\lim_{x \rightarrow \pi/2 + k\pi} f(x) = \pi/2$, $k \in \mathbb{Z}$, a f je tedy spojitá v každém bodě tvaru $\pi/2 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Spočtěme

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2 + k\pi} f'(x) = \lim_{x \rightarrow \pi/2 + k\pi} \frac{2 \sin x \cos x}{\cos^4 x + \sin^4 x} = 0.$$

Věta o výpočtu derivace pomocí limity derivace tedy dává (předpoklady jsou splněny!) $f'(\pi/2 + k\pi) = 0$, $k \in \mathbb{Z}$.

Příklad B5 : Snadno je vidět, že $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$ a f je 2π periodická a spojitá na $\mathbb{R}$. Spočtěme f' :

$$f'(x) = e^{\frac{2}{3} \sin x} \left(\frac{2}{3} \cos^2 x - \sin x \right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

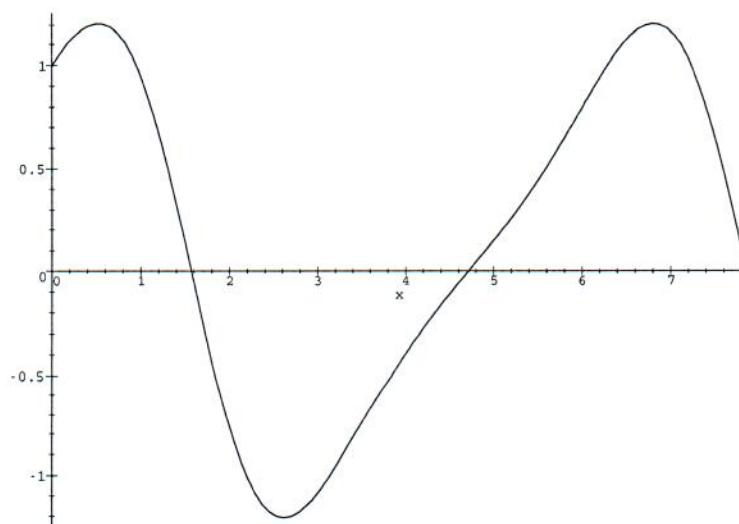
Prozkoumáme-li znaménko f' obdržíme:

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (5\pi/6, 13\pi/6) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (\pi/6, 5\pi/6) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{\pi/6, 5\pi/6\} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Funkce f je tedy rostoucí na intervalech tvaru $(5\pi/6, 13\pi/6) + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Na intervalech tvaru $(\pi/6, 5\pi/6) + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, je f klesající. Funkce f má v bodech $\pi/6 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, globální maxima a v bodech $5\pi/6 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, globální minima - toto vyplývá z výše uvedeného; $\mathcal{H}(f) = \langle f(5\pi/6), f(\pi/6) \rangle$. Funkce nemá žádné asymptoty.





Příklad D4 : Zřejmě $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$. Platí $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x}}$ pro $x > 0$. Vzhledem k tomu, že $1 - e^{-x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0$, tak pro každé $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ máme

$$f'(x) = \frac{1}{2} \frac{e^{-x^2} 2x}{\sqrt{1 - e^{-x^2}}} = e^{-x^2} \frac{x}{\sqrt{1 - e^{-x^2}}}.$$

V bodě 0 počítejme derivaci funkce f podle definice:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - e^{-x^2}}}{x}.$$

Výpočet poslední limity provedeme nejprve zprava a pak zleva.

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sqrt{1 - e^{-x^2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \sqrt{\frac{e^{-x^2} - 1}{-x^2}}$$

Uvědomme si, že

- (1) $\lim_{y \rightarrow 0+} \frac{e^y - 1}{y} = 1$,
- (2) $\lim_{x \rightarrow 0} -x^2 = 0$,
- (3) $-x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
- (4) $\sqrt{}$ je spojitá na svém definičním oboru.

Z věty o limitě složené funkce, (1), (2) a (3) plyne $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{e^{-x^2} - 1}{-x^2} = 1$. Odtud, z (4) a věty o limitě složené funkce obdržíme

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \sqrt{\frac{e^{-x^2} - 1}{-x^2}} = 1.$$

Obdobně dostaneme

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{\sqrt{1 - e^{-x^2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0-} -\sqrt{\frac{e^{-x^2} - 1}{-x^2}} = -1.$$

Derivace funkce f v bodě 0 tedy neexistuje. Platí totiž $f'_+(0) = 1$, $f'_-(0) = -1$.

Příklad D5 : Snadno zjistíme, že $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Funkce f je sudá. Zkoumejme tedy funkci f zatím **pouze** na intervalu $(0, +\infty)$. Pak máme $f(x) = (\log x)^3 - 3 \log x$.

Spočtěme limity v „krajních bodech“.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0+} \log x ((\log x)^2 - 3) = (-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty, \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \log x ((\log x)^2 - 3) = (+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty. \end{aligned}$$

Pro každé $x > 0$ platí

$$f'(x) = \frac{3}{x} ((\log x)^2 - 1) \quad \text{a} \quad f''(x) = \frac{3}{x^2} (-(\log x)^2 + 2 \log x + 1).$$

Víme, že

- (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1,$
- (2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$
- (3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1,$
- (4) $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1.$

Z (*), (1)–(4) a z věty o aritmetice limit vyplývá

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 2 \sin(\pi/6 + x)}{\operatorname{tg} x} = 1 - \sqrt{3}.$$

(2d)

Příklad C4 : Pro funkci f platí

$$f(x) = \begin{cases} -1/2, & x \in \langle 2\pi/3, 4\pi/3 \rangle + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}, \\ \cos x, & x \in ((\pi/3, 2\pi/3) \cup (4\pi/3, 5\pi/3)) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}, \\ 1/2, & x \in \langle -\pi/3, \pi/3 \rangle + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Z předchozího vyjádření vyplývá, že

$$f'(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\pi/3, \pi/3) + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}, \\ -\sin x, & x \in (\pi/3, 2\pi/3) + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Funkce f je spojitá na $\mathbb{R}$ a proto můžeme podle z předchozího vyjádření vypočítat jednostranné derivace jako příslušné limity derivací:

$$f'_+(\pi/3 + 2k\pi) = \lim_{x \rightarrow \pi/3 + 2k\pi+} -\sin x = -\sin(\pi/3 + 2k\pi) = -\sqrt{3}/2,$$

$$f'_-(\pi/3 + 2k\pi) = \lim_{x \rightarrow \pi/3 + 2k\pi-} 0 = 0,$$

$$f'_+(2\pi/3 + 2k\pi) = 0,$$

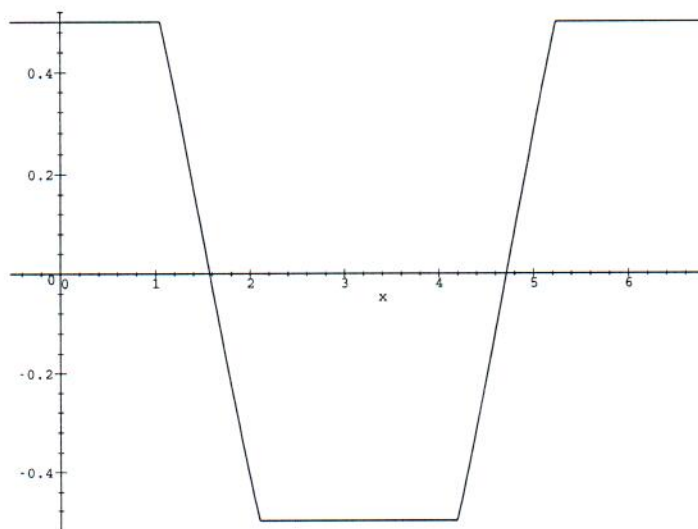
$$f'_-(2\pi/3 + 2k\pi) = -\sin(2\pi/3 + 2k\pi) = -\sqrt{3}/2,$$

$$f'_+(4\pi/3 + 2k\pi) = -\sin(4\pi/3 + 2k\pi) = \sqrt{3}/2,$$

$$f'_-(4\pi/3 + 2k\pi) = 0,$$

$$f'_+(5\pi/3 + 2k\pi) = 0,$$

$$f'_-(5\pi/3 + 2k\pi) = -\sin(5\pi/3 + 2k\pi) = \sqrt{3}/2, \quad k \in \mathbb{Z}.$$



Příklad E2 : Označme $a_n = \sqrt{n^3 + 1} - \sqrt{n^3 - 1}$. Platí:

$$a_n > 0 \text{ pro každé } n \in \mathbb{N} \text{ a } a_n = \frac{2}{\sqrt{n^3 + 1} + \sqrt{n^3 - 1}} < \frac{2}{n^{3/2}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Řada $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n^{3/2}}$ konverguje a proto podle srovnávacího kritéria konverguje i vyšetřovaná řada.

Příklad E3 : Pišme

$$\left(\frac{2^x + 8^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = \exp\left(\frac{1}{x} \cdot \log\left(\frac{2^x + 8^x}{2}\right)\right).$$

Spočítejme nejprve limitu

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log\left(\frac{2^x + 8^x}{2}\right)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log\left(\frac{2^x + 8^x}{2}\right)}{\frac{2^x + 8^x}{2} - 1} \cdot \frac{2^x + 8^x - 2}{2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log\left(\frac{2^x + 8^x}{2}\right)}{\frac{2^x + 8^x}{2} - 1} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x + 8^x - 2}{2x} = 1 \cdot \log 4. \end{aligned}$$

Při výpočtu první limity jsme využili

- (1) $\lim_{y \rightarrow 1} \frac{\log y}{y-1} = 1$,
- (2) výraz $\frac{2^x + 8^x}{2}$ je na jistém okolí 0 různý od 1,
- (3) větu o limitě složené funkce.

Rovnost

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x + 8^x - 2}{2x} = \log 4$$

je možno odvodit pomocí l'Hospitalova pravidla nebo také takto:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x + 8^x - 2}{2x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \cdot \frac{2^x - 1}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \cdot \frac{8^x - 1}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \cdot \frac{e^{x \log 2} - 1}{x \log 2} \cdot \log 2 + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \cdot \frac{e^{x \log 8} - 1}{x \log 8} \cdot \log 8 \\ &= \frac{1}{2}(\log 2 + \log 8) = \log 4. \end{aligned}$$

Zde jsme užili větu o limitě složené funkce, známou limitu $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y} = 1$, prostotu zobrazení $x \mapsto x \log 2$, $x \mapsto x \log 8$ (viz podmínka (P1) ve větě o limitě složené funkce) a větu o aritmetice limit.

Předchozí výpočty spolu se spojitostí exponenciály dávají

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2^x + 8^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = 4.$$

Příklad E4 : Zkoumaná funkce je definována na celém $\mathbb{R}$ a je na $\mathbb{R}$ spojitá. Je-li $x \neq 0$, můžeme $f'(x)$ vypočítat pomocí věty o derivaci složené funkce:

$$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1 - \frac{1}{(1+x^2)^2}}} \cdot \frac{-2x}{(1+x^2)^2} = \frac{2 \operatorname{sgn} x}{(1+x^2)\sqrt{x^2+2}}.$$

(2e)

V 0 vypočítáme jednostranné derivace pomocí limity derivace (předpoklady příslušné věty jsou splněny):

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 \operatorname{sgn} x}{(1+x^2)\sqrt{x^2+2}} = \sqrt{2},$$
$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2 \operatorname{sgn} x}{(1+x^2)\sqrt{x^2+2}} = -\sqrt{2}.$$

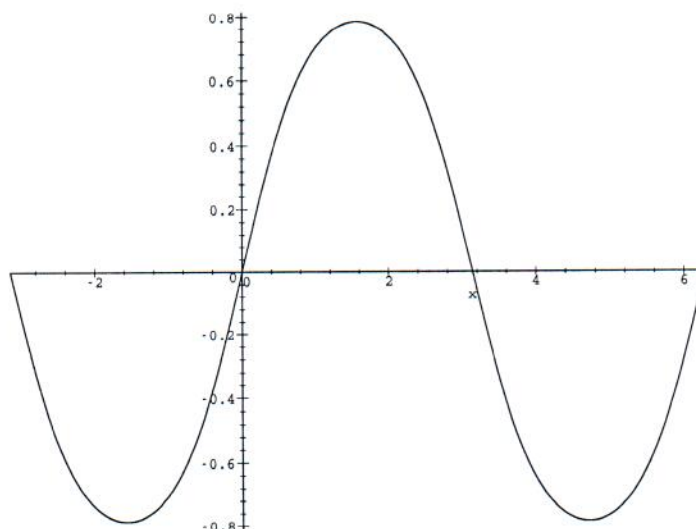
V 0 tedy derivace neexistuje.

Příklad E5 : Platí: $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$, f je spojitá na $\mathbb{R}$, 2π -periodická a lichá. Spočtěme derivace a zkoumejme jejich znaménka:

$$f'(x) = \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x}, \quad x \in \mathbb{R},$$
$$f''(x) = -\sin x \cdot \frac{1 + \sin^2 x + 2 \cos^2 x}{(1 + \sin^2 x)^2}, \quad x \in \mathbb{R};$$
$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\pi/2, \pi/2) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$
$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (\pi/2, 3\pi/2) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pi/2 + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$
$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (\pi, 2\pi) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$
$$f''(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (0, \pi) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$
$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Z výše uvedeného vyplývá, že f je rostoucí na intervalech tvaru $(-\pi/2, \pi/2) + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, klesající na intervalech tvaru $(\pi/2, 3\pi/2) + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$; v bodech $\pi/2 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, má f globální maxima a v bodech $3\pi/2 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, má f globální minima. Funkce f je na intervalech $(0, \pi) + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, konkávní a na intervalech tvaru $(\pi, 2\pi) + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, konvexní, v bodech $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, má f inflexní body; $\mathcal{H}(f) = \langle -\pi/4, \pi/4 \rangle$; f nemá žádné asymptoty.

Takto vypadá graf funkce f :



To znamená, že $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 \sqrt[n]{n}}{n^3 + \sqrt[2n]{n}}$ neexistuje.

Příklad F2 : Funkce $\arctg$ je ve svém definičním oboru rostoucí a proto

$$\forall n \in \mathbb{N} : 0 < \arctg 1 \leq \arctg n$$

a také

$$(\star) \quad \forall n \in \mathbb{N} : 0 < \frac{\arctg 1}{n} \leq \frac{\arctg n}{n}.$$

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverguje a proto diverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctg 1}{n}$. Odtud, z $(\star)$ a ze srovnávacího kritéria dostáváme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctg n}{n}$ diverguje.

Příklad F3 : Zde nejde o nic jiného, než o určení asymptoty k funkci $x \mapsto \sqrt[3]{x^3 + x}$ v $+\infty$. Počítejme:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3 + x}}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{1 + \frac{1}{x^2}} = 1 \quad (= a); \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3 + x} - x &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3 + x} - x) \cdot \frac{(x^3 + x)^{\frac{2}{3}} + (x^3 + x)^{\frac{1}{3}}x + x^2}{(x^3 + x)^{\frac{2}{3}} + (x^3 + x)^{\frac{1}{3}}x + x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{(x^3 + x)^{\frac{2}{3}} + (x^3 + x)^{\frac{1}{3}}x + x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{(x^{\frac{3}{2}} + x^{-\frac{1}{2}})^{\frac{2}{3}} + (x^3 + x)^{\frac{1}{3}} + x} = \frac{1}{+\infty} = 0 \quad (= b). \end{aligned}$$

Řešením úlohy jsou čísla $a = 1$ a $b = 0$.

Příklad F4 : Pro $x \neq 0$ platí

$$f'(x) = 2x(\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x}) + x^2(-\frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x}).$$

Tento vztah vyplývá z věty o aritmetice derivací a věty o derivaci složené funkce. V bodě 0 počítejme derivaci z definice, tj. počítejme limitu

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} x(\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x}) = 0,$$

neboť $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$ a funkce $x \mapsto (\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x})$ je omezená na jistém prstencovém okolí bodu 0. Platí tedy $f'(0) = 0$.

Příklad F5 : Snadno zjistíme $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$ a f je na $\mathbb{R}$ spojitá; $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ a $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$. Funkce f není lichá, není sudá a není periodická. Pro f' platí

$$f'(x) = (x^2 + 4x + 3)e^x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

můžeme podle věty o limitě složené funkce a Heineho věty psát

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(1 + \frac{1}{n^2+n})}{\frac{1}{n^2+n}} = 1.$$

Z věty o aritmetice limit a spojitosti odmocniny plyne

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{2}{n^4}} + \sqrt{1 + \frac{1}{n^4}}}{1 + \frac{1}{n}} = 2.$$

Dohromady pak máme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(n^2 + n + 1) - \log(n^2 + n)}{\sqrt{n^4 + 2} - \sqrt{n^4 + 1}} = 2.$$

Příklad 12 : Členy uvažované řady jsou kladné a použijeme-li podílové kritérium, dostaneme:

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^{n+1} + 4^{n+1}}{4^{n+1} + 5^{n+1}} \cdot \frac{4^n + 5^n}{3^n + 4^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{3^{n+1}}{4^n} + 4}{\frac{4^{n+1}}{5^n} + 5} \cdot \frac{\frac{4^n}{5^n} + 1}{\frac{3^n}{4^n} + 1} = \frac{4}{5} < 1. \end{aligned}$$

Zkoumaná řada tedy konverguje podle podílového kritéria.

Příklad 13 : Limita čitatele a jmenovatele je rovna 0 a funkce ve jmenovateli i čitateli mají v každém bodě vlastní derivaci. Pokusme se tedy použít l'Hospitalovo pravidlo:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{e^{x^3} - 1} \stackrel{?}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos x + x \sin x}{e^{x^3} \cdot 3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{e^{x^3} \cdot 3x} = \frac{1}{3}.$$

Vzhledem k tomu, že limita podílu derivací existuje, tak je i první rovnost v předchozím výpočtu v pořádku a výsledek je roven 1/3.

Příklad 14 : Pro hodnoty funkce f platí

$$f(x) = \begin{cases} x + 4 \operatorname{arctg}(\sin x), & x \in (2k\pi, (2k+1)\pi), \quad k \in \mathbb{Z}, \\ x, & x \in ((2k+1)\pi, (2k+2)\pi), \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Odtud již můžeme vypočítat hodnotu derivace všude mimo body ve tvaru $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$:

$$f'(x) = \begin{cases} 1 + 4 \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x}, & x \in (2k\pi, (2k+1)\pi), \quad k \in \mathbb{Z}, \\ 1, & x \in ((2k+1)\pi, (2k+2)\pi), \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Funkce f je na $\mathbb{R}$ spojitá a jednostranné derivace v bodech $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, lze tedy počítat pomocí limit derivací:

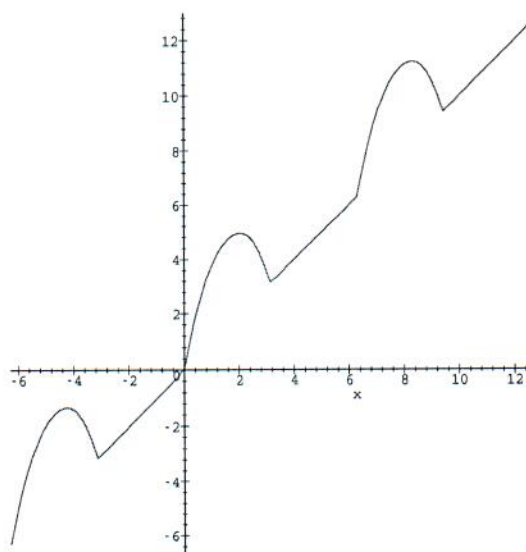
$$f'_+(2k\pi) = \lim_{x \rightarrow 2k\pi+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 2k\pi+} \left(1 + 4 \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x} \right) = 5,$$

$$f'_-(2k\pi) = \lim_{x \rightarrow 2k\pi-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 2k\pi-} 1 = 1,$$

$$f'_-((2k+1)\pi) = \lim_{x \rightarrow (2k+1)\pi-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow (2k+1)\pi-} \left(1 + 4 \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x} \right) = -3,$$

$$f'_+((2k+1)\pi) = \lim_{x \rightarrow (2k+1)\pi+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow (2k+1)\pi+} 1 = 1.$$

Z výše uvedeného vyplývá, že funkce f v bodech tvaru $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, nemá derivaci.



Příklad 15 : Platí $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -1-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = 0$. Funkce f je spojitá na $\mathcal{D}(f)$, ale není sudá, ani lichá, ani periodická. Spočtěme f' a f'' a prozkoumejme jejich znaménko:

$$f'(x) = \frac{x(3+x)}{(1+x)^2} \exp(x/(1+x)), \quad x \in \mathcal{D}(f);$$

$$f''(x) = \frac{5x+3}{(1+x)^4} \exp(x/(1+x)), \quad x \in \mathcal{D}(f);$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -3) \cup (0, +\infty),$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-3, -1) \cup (-1, 0),$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-3, -1\};$$

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-3/5, \infty),$$

$$f''(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (-1, -3/5),$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-3/5\}.$$

Ve výpočtu jsme využili větu o aritmetice limit pro funkce a vztah

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a),$$

který vyplývá ze spojitosti funkce g v bodě a . ■

5.1.18. Poznámka. Tvrzení Věty 5.1.17 platí obdobně i pro jednostranné derivace.

5.1.19. Příklad. Necht $n \in \mathbb{N}$, $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ a $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$, $x \in \mathbb{R}$. Dokažte, že

$$f'(x) = a_1 + 2a_2x + \dots + na_nx^{n-1}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Řešení. Vzorec plyne z Příkladů 5.1.11, 5.1.12 a Věty 5.1.17(a). ♣

Na následujících příkladech ukážeme, že předpoklady Věty 5.1.17 jsou podstatné a není možné je vynechat.

(3a)

5.1.20. Příklad. Definujme funkce f a g proměnné $x \in \mathbb{R}$ předpisy

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sign} x, & x \neq 0, \\ -\frac{3}{4}, & x = 0, \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} -\operatorname{sign} x, & x \neq 0, \\ \frac{1}{2}, & x = 0. \end{cases}$$

Dokažte, že $f'(0)$ a $g'(0)$ existují, ale $(f+g)'(0)$ neexistuje.

Řešení. Obdobně jako v Příkladu 5.1.14 spočteme, že $f'(0) = \infty$ a $g'(0) = -\infty$. Dále platí

$$f(x) + g(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0, \\ -\frac{1}{4}, & x = 0. \end{cases}$$

Opět snadno vypočítáme, že $(f+g)'_+(0) = \infty$ a $(f+g)'_-(0) = -\infty$. Tedy podle Věty 5.1.5 $(f+g)'(0)$ neexistuje. ♣

Předcházející příklad ukazuje, že z existence derivací funkcí f a g v bodě a obecně neplyne existence derivace funkce $f+g$ v bodě a . Funkce uvedené v tomto příkladu ovšem nesplňují podmínku Věty 5.1.17(a), totiž že výraz $f'(a) + g'(a)$ má mít smysl.

Následující příklad ilustruje důležitost předpokladu spojitosti alespoň jedné z uvažovaných funkcí ve Větě 5.1.17(b).

(3b)

5.1.21. Příklad. Necht funkce f a g jsou definovány stejně jako v Příkladu 5.1.20. Dokažte, že výraz $f'(0)g(0) + f(0)g'(0)$ má smysl, ale přesto $(fg)'(0)$ neexistuje.

Řešení. Vynásobíme-li funkce f a g , dostaneme

$$(fg)(x) = \begin{cases} -1, & x \neq 0, \\ -\frac{3}{8}, & x = 0. \end{cases}$$

Podobně jako v Příkladu 5.1.20 odvodíme, že derivace $(fg)'(0)$ neexistuje. Výraz $f'(0)g(0) + f(0)g'(0)$ však smysl má, protože

$$f'(0)g(0) + f(0)g'(0) = \infty \cdot \frac{1}{2} + \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot (-\infty) = \infty.$$

Také ve Větě 5.1.17(c) je předpoklad spojitosti funkce g podstatný, jak ukazuje následující příklad.

(4)

5.1.22. Příklad. Necht $f(x) = 1$, $x \in \mathbb{R}$ a necht funkce g je definována předpisem

$$g(x) = \begin{cases} -\operatorname{sign} x, & x \neq 0, \\ \frac{1}{2}, & x = 0. \end{cases}$$

Dokažte, že výraz

$$\frac{f'(0)g(0) - f(0)g'(0)}{g^2(0)}$$

má smysl, přesto ale $(\frac{f}{g})'(0)$ neexistuje.

Řešení. Jest

$$\frac{f'(0)g(0) - f(0)g'(0)}{g^2(0)} = \frac{-g'(0)}{g^2(0)} = \frac{\infty}{\frac{1}{4}} = \infty,$$

a tedy výraz

$$\frac{f'(0)g(0) - f(0)g'(0)}{g^2(0)}$$

má smysl. Dále

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \begin{cases} \operatorname{sign} x, & x \neq 0, \\ 2, & x = 0, \end{cases}$$

a tedy

$$\left(\frac{f}{g}\right)'_+(0) = -\infty$$

a

$$\left(\frac{f}{g}\right)'_-(0) = \infty.$$

Podle Věty 5.1.5 tedy $(\frac{f}{g})'(0)$ neexistuje.

5.1.23. Věta (derivace složené funkce). Necht funkce g je spojitá v bodě $a \in \mathbb{R}$ a má v tomto bodě derivaci. Necht funkce f má derivaci v bodě $g(a)$. Pak

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a))g'(a), \quad (5.2)$$

je-li výraz na pravé straně definován.

Důkaz. Označme $b = g(a)$. Díky existenci derivace $f'(b)$ nalezneme $\sigma \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$, takové, že funkce f je definována na $B(b, \sigma)$ (Poznámka 5.1.6(a)). Protože g je spojitá v a , existuje $\varrho \in \mathbb{R}$, $\varrho > 0$, takové, že $g(B(a, \varrho)) \subset B(b, \sigma)$ (Definice 4.1.18). Funkce $f \circ g$ je tedy dobře definována na okolí $B(a, \varrho)$.

Předpokládejme nejprve, že platí $g'(a) \neq 0$. Pak existuje $\tilde{\varrho} \in (0, \varrho)$ takové, že pro každé $x \in P(a, \tilde{\varrho})$ platí

$$\frac{g(x) - g(a)}{x - a} \neq 0. \quad (5.3)$$

Tím je důkaz dokončen. ■

5.1.24. Poznámka. Ve Větě 5.1.23 je předpoklad spojitosti funkce g v bodě a automaticky splněn, je-li $g'(a)$ vlastní, jak plyne z Věty 5.1.15.

Předpoklad spojitosti vnitřní funkce ve Větě 5.1.23 nelze obecně vynechat, jak ukazuje následující příklad.

5.1.25. Příklad. Necht funkce f a g jsou definovány pomocí předpisů

$$f(y) = |y|, \quad y \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \begin{cases} \operatorname{sign} x, & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ -\frac{1}{2}, & x = 0. \end{cases}$$

5

Dokažte, že výraz $f'(g(0))g'(0)$ má smysl, ale přesto $(f \circ g)'(0)$ neexistuje.

Řešení. Podobně jako v Příkladu 5.1.14 odvodíme, že $g'(0) = \infty$. Dále zřejmě platí $f'(-\frac{1}{2}) = -1$. Výraz

$$f'(g(0))g'(0) = f'(-\frac{1}{2}) \cdot g'(0) = (-1) \cdot \infty = -\infty$$

tedy má smysl. Dále platí

$$(f \circ g)(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 0, \\ \frac{1}{2}, & x = 0, \end{cases}$$

a tedy $(f \circ g)'(0)$ neexistuje. ♣

5.1.26. Věta (derivace inverzní funkce). Necht I je nedegenerovaný interval a necht a je vnitřním bodem I . Necht f je spojitá a ryze monotónní funkce na I . Označme $b = f(a)$. Pak platí následující tvrzení.

(a) Má-li f v bodě a nenulovou derivaci, pak

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}.$$

(b) Je-li $f'(a) = 0$ a f je rostoucí na I , pak

$$(f^{-1})'(b) = \infty.$$

(c) Je-li $f'(a) = 0$ a f je klesající na I , pak

$$(f^{-1})'(b) = -\infty.$$

Důkaz. (a) Předpokládejme, že funkce f je na intervalu I rostoucí. Z Věty 4.3.6 vyplývá, že množina $J = f(I)$ je interval. Dle Věty 4.3.13 navíc víme, že inverzní funkce $f^{-1}: J \rightarrow I$ je spojitá a rostoucí. Protože a je vnitřním bodem I a f je rostoucí, je také b vnitřním bodem J . Tedy existuje $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, takové, že $B(b, \varepsilon) \subset J$. Díky tomu, že a je vnitřním bodem I víme, že existuje $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, takové, že $B(a, \delta) \subset I$. Ze spojitosti funkce f v bodě a plyne, že toto δ lze zvolit tak, aby $f(B(a, \delta)) \subset B(b, \varepsilon)$. Označme

$$\varphi(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}, \quad x \in P(a, \delta). \quad (5.8)$$

$$(6) \quad f(x) = \begin{cases} ax+b & x \leq -1 \\ ax^3+x+2b & x > -1 \end{cases}$$

(1) funkce musí být spojitá:

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} ax^3+x+2b = a(-1)+b$$

$$-a-1+2b = -a+b$$

$$\underline{b = 1}$$

(2) Derivace $f'_+(-1) = f'_-(-1)$. To je správně tedy lze užít stejn

$$f'_+(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (ax^3+x+2b)' = \lim_{x \rightarrow -1^+} 3ax^2+1 = 3a+1$$

$$f'_-(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (ax+b)' = \lim_{x \rightarrow -1^-} a = a$$

$$3a+1 = a$$

$$2a = -1$$

$$\underline{a = -\frac{1}{2}}$$

7. Kde dělá tazatel chybu?

Given the function:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{if } x \geq 0 \\ x^2 - 1 & \text{if } x < 0 \end{cases}$$

Question: are we justified to say that the derivative at $f(0)$ exists? If so, what is $f'(0)$? And how do we justify it?

Of course I do realize that the function isn't continuous at $x = 0$ but still since the slope near $x = 0$ seems equal near $0+$ and $0-$ I wondered why we can't say that $f'(0) = 0$

What I tried is this:

hady →

$$f'_+(0) = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{(x+h)^2 + 1 - (x^2 + 1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{(0+h)^2 + 1 - (0^2 + 1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{h^2}{h} = h = 0$$
$$f'_-(0) = \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{(x+h)^2 - 1 - (x^2 - 1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{(0+h)^2 - 1 - (0^2 - 1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{h^2}{h} = h = 0$$

My conclusion is that since both the right and left limit using the definition of the derivative exist and generate the same answer the limit exists such that $f'(0) = 0$.

Apparently this is not true, so what is my mistake?

Pochází z: <https://math.stackexchange.com/questions/1532014/how-to-apply-the-definition-of-a-derivative-with-a-piecewise-function>

$$f'_-(0) = \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{(0+h)^2 - 1 - (0^2 - 1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{h^2 - 2}{h} = \infty$$