15. cvičení – VOLSF f^g

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Teorie

Následující limity lze počítat přímo použitím exponenciálního triku, totiž postupem využívajícího větu o limitě složené funkce (u níž je pak třeba ověřit podmínky). Lze zapsat

$$\lim_{x\to a} f^g = \lim_{x\to a} e^{g\ln f}.$$

Pomocí VOLSF převedeme na výpočet limity

$$\lim_{x\to a}(g\ln f).$$

Původní limitu pak dostaneme (za podmínky S nebo P) jako

$$\lim_{y\to A} e^y,$$

kde $A = \lim\limits_{x\to a}(g\ln f)$.

Limity typu 1^∞

Ukážeme si, jak se tato metoda používá na limity typu 1^∞. To znamená, že počítáme limitu $\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)}$, kde $\lim_{x\to a} f(x) = 1$ a $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$. Schematicky znázorněno:

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to a} e^{g(x)\ln(f(x))} = \lim_{x\to a} e^{\frac{\ln(f(x))}{f(x)-1}(f(x)-1)g(x)}$$

Protože $\lim_{y\to 1}\frac{\ln y}{y-1} = 1$, lze výpočet převést na otázku výpočtu

$$\lim_{x\to a}(f(x)-1)g(x).$$

Původní limita se pak dopočte pomocí exponenciály jako výše.

Při výpočtech je pak třeba několikrát použít a **ověřit podmínky VOLSF** a správně aplikovat Aritmetiku limit.

Příklady

1. Spočtěte limity

   (a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^x$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x^2}\right)^x$

2. Spočtěte limity

   (a) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{(1-\sqrt{x})/(1-x)}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{(1-\sqrt{x})/(1-x)}$

(c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{x+2}{2x-1}\right)^{x^2}$

(d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{3x^2-x+1}{2x^2+x+1}\right)^{\frac{x^3}{1-x}}$

(e) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}+} \left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8}+x\right)\right)^{\operatorname{tg} 2x}$

(f) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{\frac{x-1}{x+1}}$

(g) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2+2x-1}{2x^2-3x-2}\right)^{1/x}$

3. Spočtěte limity

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{\ln x+1}{\ln x}\right)^{\ln x}$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \left(1+x^2\right)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \left(1+x^2\right)^{\operatorname{cotg}^2 x}$

(d) $\lim\limits_{x\to 0} (1+\operatorname{tg} x)^{\frac{1}{\sin x}}$

(e) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\operatorname{tg} x}$

(f) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{x+a}{x-a}\right)^{x}$, $a \in \mathbb{R}$

Zkouškové příklady

4. Spočtěte limity

(a) $\lim\limits_{x\to 0+} \left(1-\sqrt{\arcsin x}\right)^{\frac{1}{\sqrt[4]{1-\cos x}}}$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \left(2e^{\frac{4x}{x+1}}-1\right)^{\frac{x^2+1}{3x}}$

(c) $\lim\limits_{x\to 0+} \left(\frac{4^x+5^x+6^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$

Teorie

5.❀ Nechť f je funkce spojitá na $\mathbb{R}$. Nechť navíc $f(x)=0$ pro všechna $x \in \mathbb{Q}$. Ukažte, že pak $f(x)=0$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

6. Sestrojte (stačí obrázkem) spojitou nezápornou funkci f definovanou na $\mathbb{R}$ takovou, že: pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $0 \in f([n,\infty)$ a f není omezená na intervalu $[n,\infty)$.

(5) Sporem. Pak definice limity.