14. cvičení – VOLSF + exp, log

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Příklady

1. Spočtěte limity zadaných funkcí

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+3x)}{x}$

Řešení:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+3x)}{x} = \lim_{x\to 0} 3\frac{\log(1+3x)}{3x} =$$

VOLSF, podmínka P: $3x \neq 0$ na $P(0, \frac{1}{6})$.

(b) $\lim_{x\to\infty} x\log\left(1-\frac{3}{x}\right)$

Řešení:

$$\lim_{x\to\infty} x\log\left(1-\frac{3}{x}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{\log\left(1-\frac{3}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} -3\frac{\log\left(1-\frac{3}{x}\right)}{\frac{-3}{x}} = -3$$

VOLSF, podmínka P: $-3/x \neq 0$ na $P(\infty, \frac{1}{6})$.

(c) $\lim_{x\to 1-} \frac{\sqrt{e^2-e^{2x}}}{\arccos x} = e$

Řešení: Příklad máme odsud: https://reseneulohy.cz/cs/matematika/matematicka-analyza

Převedeme na základní limitu pro $\arccos x$.

$$\lim_{x\to 1-} \frac{\sqrt{e^2-e^{2x}}}{\arccos x} = \lim_{x\to 1-} \frac{\sqrt{e^2-e^{2x}}}{\sqrt{1-x}} \cdot \frac{\sqrt{1-x}}{\arccos x}$$

První limitu nyní převedeme na limitu pro e^x.

$$\lim_{x\to 1-} \frac{\sqrt{e^2-e^{2x}}}{\sqrt{1-x}} = \lim_{x\to 1-} \frac{\sqrt{e^{2x}(e^{2(1-x)}-1)}}{\sqrt{\frac{2(1-x)}{2}}} = \lim_{x\to 1-} e^x\sqrt{2}\sqrt{\frac{e^{2(1-x)}-1}{2(1-x)}} \overset{VOAL}{=} e^1\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{1}.$$

Pro původní limitu pak máme

$$\lim_{x\to 1-} \frac{\sqrt{e^2-e^{2x}}}{\sqrt{1-x}} \cdot \frac{\sqrt{1-x}}{\arccos x} \overset{VOAL}{=} e\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = e.$$

Odůvodnění:

$$\lim_{x\to 1-} \frac{e^{2(1-x)}-1}{2(1-x)} = 1.$$

Vnější funkce $\frac{e^y-1}{y}$, vnitřní $2(1-x)$. Navíc $\lim_{x\to 1-} 2(1-x) = 0$ a $2(1-x)$ je monotónní na $\mathbb{R}$, tedy $2(1-x) \neq 0$ na $P(1, \frac{1}{42})$.

Potom

$$\lim_{x\to 1-} \sqrt{\frac{e^{2(1-x)}-1}{2(1-x)}} = \sqrt{1}.$$

Vnější funkce $\sqrt{y}$, vnitřní $\frac{e^{2(1-x)}-1}{2(1-x)}$. Podmínka (S): $\sqrt{y}$ je spojitá v bodě 1.

(d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\log(x^2-x+1)}{\log(x^{10}+x+1)}$

Řešení:

Postupujeme vytknutím.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(x^2-x+1)}{\log(x^{10}+x+1)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log x^2(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})}{\log x^{10}(1+\frac{1}{x^9}+\frac{1}{x^{10}})} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log x^2+\log(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})}{\log x^{10}+\log(1+\frac{1}{x^9}+\frac{1}{x^{10}})} =$$

Z vlastností logaritmu:

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2\log x+\log(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})}{10\log x+\log(1+\frac{1}{x^9}+\frac{1}{x^{10}})} =$$

A konečně poslední vytknutí

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2+\log(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})/\log x}{10+\log(1+\frac{1}{x^9}+\frac{1}{x^{10}})/\log x} = \frac{2+0}{10+0} = \frac{1}{5}.$$

Výpočet limity využívá věty o aritmetice limit a VOLSF (spojitost logaritmu)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})}{\log x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})}{1} \cdot \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\log x} = \log(1-0+0)\cdot 0 = 0.$$

(e) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{e^{x^2}-1}$

Řešení:

Sledujte výpočet.

$$\lim_{x\to0} \frac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{e^{x^2}-1} = \lim_{x\to0} \frac{(\sqrt{1+x\sin x}-1)/x^2}{(e^{x^2}-1)/x^2}$$

Jmenovatel jde do jedničky (VOLSF, podm. (P): $x^2 \neq 0$ na $P(0,1)$).
Druhý zlomek řešíme rozšířením odmocniny.

$$\lim_{x\to0} \frac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{x^2} = \lim_{x\to0} \frac{1+x\sin x-1}{x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x\sin x}+1}$$

$$\overset{AL}{=} \lim_{x\to0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x\to0} \frac{1}{\sqrt{1+x\sin x}+1} = 1 \cdot \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

Dohromady z aritmetiky limit:

$$\lim_{x\to0} \frac{(\sqrt{1+x\sin x}-1)/x^2}{(e^{x^2}-1)/x^2} \overset{AL}{=} 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

(f) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\log(x^3-\arctan x)}{\log(x^2+\arctan x)}$

Řešení:

Vytkneme dominantní člen

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\log(x^3-\arctan x)}{\log(x^2+\arctan x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\log x^3\left(1-\frac{\arctan x}{x^3}\right)}{\log x^2\left(1+\frac{\arctan x}{x^2}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{3\log x+\log\left(1-\frac{\arctan x}{x^3}\right)}{2\log x+\log\left(1+\frac{\arctan x}{x^2}\right)}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{\log\left(1-\frac{\arctan x}{x^3}\right)}{\log x}}{2+\frac{\log\left(1+\frac{\arctan x}{x^2}\right)}{\log x}}\overset{VOAL}{=}\frac{3+0}{2+0}$$

Použili jsme limity

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\arctan x}{x^3}=0=\lim_{x\to\infty}\frac{\arctan x}{x^2},$$

neb $\arctan x$ je omezená a $1/x^2$ $(1/x^3)$ mizející funkce.
Dále jsme použili spojitosti logaritmu (v 1) a aritmetiku limit.

(g) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left[\log(x+1)-\log x\right]=1$

Řešení: Užijeme pravidla, že rozdíl logaritmů je logaritmus podílu a spojitosti logaritmu.

$$\lim_{x\to+\infty} x[\log(x+1)-\log x]=\lim_{x\to+\infty} x\log\frac{x+1}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$$

VOLSF, podmínka (P), $\frac{1}{x}\neq 0$ na $P(\infty,42)$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}=1.$$

(h) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{\log(x^2+4)-\log x^2}}{\operatorname{arccot} x}$

Řešení: Příklad máme odsud: `https://reseneulohy.cz/cs/matematika/matematicka-analyza`
Rozepíšeme dle vzorců pro logaritmus a půjčíme a vrátíme na známé limity:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{\log(x^2+4)-\log x^2}}{\operatorname{arccot} x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{\log\left(\frac{x^2+4}{x^2}\right)}}{\operatorname{arccot} x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x\cdot\sqrt{\log\left(\frac{x^2+4}{x^2}\right)}}{x\cdot\operatorname{arccot} x}$$
$$=\lim_{x\to\infty} x\cdot\sqrt{\frac{4}{x^2}}\cdot\sqrt{\frac{\log\left(1+\frac{4}{x^2}\right)}{\frac{4}{x^2}}}\cdot\frac{1}{x\cdot\operatorname{arccot} x}$$
$$\overset{VOAL}{=} 2\cdot 1\cdot 1=2.$$

Odůvodnění:
Protože jsme na okolí nekonečna, máme $\sqrt{x^2}=|x|=x$. Tedy

$$\lim_{x\to\infty} x\sqrt{\frac{4}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x}\cdot 2=2.$$

Dále

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\log\left(1+\frac{4}{x^2}\right)}{\frac{4}{x^2}}=1.$$

Jde o VOLSF, podmínka (P): vnitřní funkce $\frac{4}{x^2} \neq 0$ na $P(\infty, 1)$.
Navíc
$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{\log\left(1+\frac{4}{x^2}\right)}{\frac{4}{x^2}}} = 1,$$
VOLSF, vnější funkce $\sqrt{y}$ je spojitá v 1.

(i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log(1+x^2)}{\log(1-x^2)}$

Řešení:
$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x^2)}{\log(1-x^2)} = \lim_{x\to 0} -\frac{\log(1+x^2)}{x^2} \frac{-x^2}{\log(1-x^2)} \overset{VOAL}{=} -1$$
Podmínka P pro $\pm x^2 \neq 0$ na $P(0, \frac{1}{2})$.

(j) $\lim\limits_{x\to\infty} x \log\left(1 - \dfrac{2}{x^2}\right)$

Řešení:
$$\lim_{x\to\infty} x \log\left(1 - \frac{2}{x^2}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{-2}{x} \frac{\log\left(1-\frac{2}{x^2}\right)}{\frac{-2}{x^2}} \overset{VOAL}{=} 0 \cdot 1 = 0$$
Podmínka P pro $-2/x^2 \neq 0$ na $P(\infty, \frac{1}{6})$.

(k) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\log(2+e^{3x})}{\log(3+e^{2x})}$

Řešení:
Vytkneme. Pak použijte větu o aritmetice limit a spojitost logaritmu.
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(2+e^{3x})}{\log(3+e^{2x})} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log e^{3x} + \log(\frac{2}{e^{3x}}+1)}{\log e^{2x} + \log(\frac{3}{e^{2x}}+1)} =$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{3x + \log(\frac{2}{e^{3x}}+1)}{2x + \log(\frac{3}{e^{2x}}+1)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3 + \log(\frac{2}{e^{3x}}+1)/x}{2 + \log(\frac{3}{e^{2x}}+1)/x} = \frac{3+0}{2+0} = \frac{3}{2}.$$

(l) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x\sin x}}{e^{x^2}-1}$

Řešení:
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x\sin x}}{e^{x^2}-1} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x\sin x}/x^2}{(e^{x^2}-1)/x^2} \overset{AL}{=} \frac{\infty}{1} = \infty$$
Zdůvodnění: Z VOLSF, podmínka (P) $x^2 \neq 0$ na $P(0,1)$:
$$\lim_{x\to 0} \frac{(e^{x^2}-1)}{x^2} = 1$$
Dále, protože $x\sin x$ je kladný výraz na okolí nuly, též tak x^2, můžeme doplnit absolutní hodnoty.
$$\lim_{x\to 0} \frac{|x\sin x|^{1/2}}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{|\sin x|^{1/2}}{|x|^{3/2}} = \lim_{x\to 0} \frac{|\sin x|^{1/2}}{|x|^{1/2}} \cdot \frac{1}{|x|}$$
$$\overset{AL}{=} \lim_{x\to 0} \sqrt{\frac{\sin x}{x}} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{|x|} = 1 \cdot +\infty = +\infty.$$

(m) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x - 1}{x}$, kde $a > 0$.

Řešení:

Spočteme limitu pro obecné $a > 0$, $a \neq 1$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x\log a} - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x\log a} - 1}{x\log a} \cdot \log a = 1 \cdot \log a.$$

Užito VOLSF, vnitřní funkce $y = x\log a \neq 0$ na $P(0, 2)$.

Pro $a = 1$ je limita triviálně rovna 0.

(n) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\log(1 + 3^x)}{\log(1 + 2^x)}$

Řešení: Protože $3^x \to 0$, pokud $x \to -\infty$, vede k cíli rozšíření.

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{\log(1 + 3^x)}{\log(1 + 2^x)} = \lim_{x\to -\infty} \frac{\frac{\log(1+3^x)}{3^x}}{\frac{\log(1+2^x)}{2^x}} \cdot \frac{3^x}{2^x} = \frac{1}{1} \cdot 0 = 0.$$

VOLSF pro $g(x) = 3^x \neq 0$ a $h(x) = 2^x \neq 0$ na $\mathbb{R}$,

(o) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\log(1 + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x})}{\log(1 + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x})}$

Řešení:

V čitateli vytkneme $\sqrt{x}$, ve jmenovateli $\sqrt[3]{x}$, užijeme spojitost logaritmu

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\log(1 + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x})}{\log(1 + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x})} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\log\sqrt{x} + \log(x^{-1/2} + 1 + x^{-1/6})}{\log\sqrt[3]{x} + \log(x^{-1/3} + 1 + x^{-1/12})} =$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{1}{2}\log x + \log(x^{-1/2} + 1 + x^{-1/6})}{\frac{1}{3}\log x + \log(x^{-1/3} + 1 + x^{-1/12})} =$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{1}{2} + \log(x^{-1/2} + 1 + x^{-1/6})/\log x}{\frac{1}{3} + \log(x^{-1/3} + 1 + x^{-1/12})/\log x} = \frac{\frac{1}{2} + 0}{\frac{1}{3} + 0} = \frac{3}{2}.$$

(p) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\log(1 + 3^x)}{\log(1 + 2^x)}$

Řešení:

V čitateli i jmenovateli jsou dominantními členy exponenciály. Vytkneme je tedy.

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\log(1 + 3^x)}{\log(1 + 2^x)} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\log 3^x(3^{-x} + 1)}{\log 2^x(2^{-x} + 1)} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\log 3^x + \log(3^{-x} + 1)}{\log 2^x + \log(2^{-x} + 1)} =$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{x\log 3 + \log(3^{-x} + 1)}{x\log 2 + \log(2^{-x} + 1)} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\log 3 + \log(3^{-x} + 1)/x}{\log 2 + \log(2^{-x} + 1)/x} \stackrel{AL}{=}$$

Věta o limitě podílu a o limitě součtu dává (s přihlédnutím k faktu, že $0/\infty = 0$ a ke spojitosti logaritmu)

$$= \frac{\log 3 + 0/(+\infty)}{2 + 0/(+\infty)} = \frac{\log 3}{\log 2}.$$

Zkouškové příklady

2. Spočtěte limity zadaných funkcí

   (a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(\sin x) - 1}{\log\sqrt{1+x^2}}$

   Řešení:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(\sin x) - 1}{\log\sqrt{1+x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(\sin x) - 1}{\sin^2 x} \cdot \frac{\sin^2 x}{x^2} \cdot \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}-1} \cdot \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\log\sqrt{1+x^2}}$$
$$\overset{VOAL}{=} -\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 = -1$$

   Pro třetí výraz platí

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}-1} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2(\sqrt{1+x^2}+1)}{1+x^2-1} = \lim_{x\to 0} \sqrt{1+x^2}+1 = 2$$

   Pro VOLSF máme (ve zkratce) podmínky:
   První vnitřní funkce $\sin x \neq 0$ na $P\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. (Z grafu.)
   Druhá vnitřní funkce $\sqrt{1+x^2} \neq 1$ na $P(0,1)$. Plyne z výpočtu $1+x^2 \neq 1$ na $P(0,1)$.

   (b) $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{\log\left(1+\dfrac{3}{x}\right)}\left(\log(1+x^3)\right)^2$

   Řešení:

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{\log\left(1+\frac{3}{x}\right)}\left(\log(1+x^3)\right)^2 = \lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{\log\left(1+\frac{3}{x}\right)}{\frac{3}{x}}} \cdot \sqrt{\frac{3}{x}} \cdot \left(\log(1+x^3)\right)^2$$
$$= \lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{\log\left(1+\frac{3}{x}\right)}{\frac{3}{x}}} \cdot \sqrt{3} \cdot \left(\frac{\log(1+x^3)}{\sqrt[4]{x}}\right)^2$$
$$\overset{VOAL}{=} 1 \cdot \sqrt{3} \cdot 0.$$

   Platí

$$0 \leq \left(\frac{\log(1+x^3)}{\sqrt[4]{x}}\right)^2 \leq \left(\frac{\log(2x^3)}{\sqrt[4]{x}}\right)^2 = \left(\frac{\log 2 + \log(x^3)}{\sqrt[4]{x}}\right)^2$$

   Pravá strana jde do 0 z aritmetiky limit a ze škály.
   Dále máme

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{\log\left(1+\frac{3}{x}\right)}{\frac{3}{x}}} = \sqrt{1},$$

   z dvojitého použití VOLSF. Podmínka (P): $\frac{3}{x} \neq 0$ na $P(\infty, 5)$.
   Pak podmínka (S): $\sqrt{y}$ je spojitá v 1.

   (c) $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{(\sqrt{e})^{\sin x} - \cos(\sqrt{x})}{\log^2(1+\sqrt{x})}$

Řešení:

$$\lim_{x\to 0+} \frac{(\sqrt{e})^{\sin x} - \cos(\sqrt{x})}{\log^2(1+\sqrt{x})} = \lim_{x\to 0+} \frac{e^{\frac{1}{2}\sin x} - 1}{\log^2(1+\sqrt{x})} + \frac{1-\cos(\sqrt{x})}{\log^2(1+\sqrt{x})}$$
$$= \lim_{x\to 0+} \frac{e^{\frac{1}{2}\sin x}-1}{\frac{1}{2}\sin x} \cdot \frac{\frac{1}{2}\sin x}{x} \cdot \frac{(\sqrt{x})^2}{\log^2(1+\sqrt{x})} + \frac{1-\cos(\sqrt{x})}{(\sqrt{x})^2} \cdot \frac{(\sqrt{x})^2}{\log^2(1+\sqrt{x})}$$
$$\overset{VOAL}{=} 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1 = 1.$$

Podmínky pro VOLSF (telegraficky):
1) (P) $\frac{1}{2}\sin x \neq 0$ na $P^+(0, \frac{\pi}{2})$ (z grafu).
3,4,5) (P) $\sqrt{x} \neq 0$ na $P^+(0,3)$ (z grafu).

Bonus

3. Rozhodněte, zda platí

(FALSE) Nechť funkce $f(x)$ není shora omezená v žádném okolí $P(0,\delta)$. Pak $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$.
Řešení: Uvažujme funkci

$$f(x) = \begin{cases} 1/x, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Pak $\lim_{x\to 0} f(x)$ neexistuje, ale $f(x)$ je neomezená.

(TRUE) Nechť $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$. Pak existuje okolí $P(0,\delta)$ takové, že funkce f je zdola omezená na $P(0,\delta)$.
Řešení: Jde o analogii věty o limitě a omezenosti.
Zvolme $\varepsilon = 1$. Pak existuje $\delta > 0$ tak, že pro $\forall x \in P(0,\delta)$ platí $f(x) \in B(\infty, 1) = (1, \infty)$.
Neboli $f(x) > 1$ na $P(0,\delta)$.

4. Nechť $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jsou funkce. Ukažte, že

$$\max\{f(x), g(x)\} = \frac{f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|}{2},$$
$$\min\{f(x), g(x)\} = \frac{f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|}{2}.$$

Řešení:
Rozborem případů. Nechť $f(x) \geq g(x)$. Pak $f(x)-g(x) \geq 0$ a $|f(x)-g(x)| = f(x)-g(x)$. Dostáváme tedy

$$\frac{f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|}{2} = \frac{f(x)+g(x)+f(x)-g(x)}{2} = \frac{2f(x)}{2} = f(x) = \max\{f(x), g(x)\}$$

Analogicky

$$\frac{f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|}{2} = \frac{f(x)+g(x)-f(x)+g(x)}{2} = \frac{2g(x)}{2} = g(x) = \min\{f(x), g(x)\}$$

Pro $f(x) \leq g(x)$ máme $f(x) - g(x) \leq 0$ a $|f(x) - g(x)| = -f(x) + g(x)$ a tedy

$$\frac{f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|}{2} = \frac{f(x) + g(x) - f(x) + g(x)}{2} = \frac{2g(x)}{2} = g(x) = \max\{f(x), g(x)\}$$

Analogicky

$$\frac{f(x) + g(x) - |f(x) - g(x)|}{2} = \frac{f(x) + g(x) + f(x) - g(x)}{2} = \frac{2f(x)}{2} = f(x) = \min\{f(x), g(x)\}.$$