11. cvičení – Odmocniny

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Příklady

1. Spočtěte limity

   (a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sin x}{x}$

   Řešení: Použijeme větu o dvou policajtech. Pro $x > 0$ máme

   $$-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}.$$

   Protože $\lim_{x\to\infty} \pm\frac{1}{x} = 0$, tak i

   $$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 0.$$

   (b) $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-x}\cos x$

   Řešení: Použijeme větu o dvou policajtech. Máme

   $$-e^{-x} \leq e^{-x}\cos x \leq e^{-x}.$$

   Protože $\lim_{x\to\infty} \pm e^{-x} = 0$, tak i

   $$\lim_{x\to\infty} e^{-x}\cos x = 0.$$

   (c) $\lim\limits_{x\to 0} x^3\sin(x^2)$

   Řešení: Použijeme větu o dvou policajtech. Pro $x > 0$ máme

   $$-x^3 \leq x^3 \sin x^2 \leq x^3$$

   Pro $x < 0$ máme

   $$x^3 \leq x^3 \sin x^2 \leq -x^3$$

   Dohromady můžeme psát

   $$0 \leq |x^3 \sin x^2| \leq |x^3|$$

   Protože $\lim_{x\to 0} |x^3| = 0$, tak i

   $$\lim_{x\to 0} x^3\sin(x^2) = 0.$$

   (d) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x+\sin x}{x-\sin x}$

   Řešení: Vytkneme nejrychlejší člen:

   $$\lim_{x\to\infty} \frac{x+\sin x}{x-\sin x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{\sin x}{x}}{1-\frac{\sin x}{x}} \overset{VOAL}{=} \frac{1+0}{1-0} = 1.$$

   Limita $\lim_{x\to\infty} \sin x/x = 0$ podle prvního příkladu.

(e) $\lim_{x\to 0+} x\cos\left(\frac{x+3}{\sqrt{x}-1}\right)$

Řešení: Použijeme větu o dvou policajtech. Máme

$$-x \leq x\cos\left(\frac{x+3}{\sqrt{x}-1}\right) \leq x$$

Protože $\lim_{x\to 0} \pm x = 0$, tak i

$$\lim_{x\to 0} x\cos\left(\frac{x+3}{\sqrt{x}-1}\right) = 0.$$

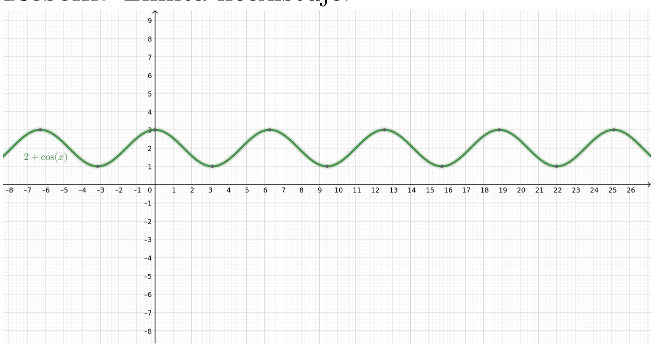
(f) $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$

Řešení: Vytkneme nejrychlejší člen

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+e^{-2x}}{1-e^{-2x}} \overset{VOAL}{=} \frac{1+0}{1-0} = 1.$$

(g) $\lim_{x\to\infty} (2+\cos x)$

Řešení: Limita neexistuje:



(h) $\lim_{x\to\infty} x+\sin x$

Řešení: Z jednoho policajta

$$x-1 \leq x+\sin x$$

Navíc

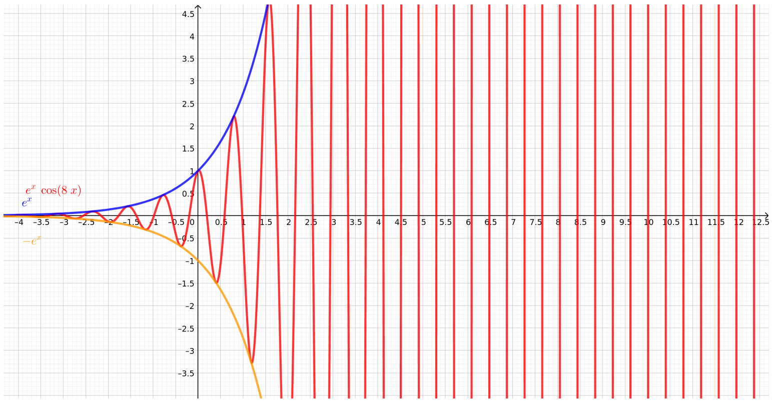
$$\lim_{x\to\infty} x-1 = \infty,$$

tedy i

$$\lim_{x\to\infty} x+\sin x = \infty.$$

(i) $\lim_{x\to\infty} e^x\cos x$

Řešení: Limita neexistuje. Graf (na obr. je kvůli názornosti funkce $e^x\cos(8x)$, ale myšlenka je stejná):



(j) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{e^x}$
Řešení:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{e^x} \overset{VOAL}{=} \frac{0}{1} = 0.$$

(k) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{\sin x}$
Řešení: Limita neexistuje. Funkce $\frac{x}{\sin x}$ není definována v bodech $k\pi$. Což znamená, že pro dané ε nejsme schopni najít žádné δ-okolí bodu ∞, kde by funkce byla definovaná. Kvůli tomu ovšem nedokážeme ověřit definici limity.

2. Spočtěte limity

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} x^3 - x^2 + 3x - 8$
Řešení: Vytkneme

$$\lim_{x\to\infty} x^3 - x^2 + 3x - 8 = \lim_{x\to\infty} x^3 \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} - \frac{8}{x^3}\right) \overset{VOAL}{=} \infty(1 - 0 + 0 - 0) = \infty.$$

(b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$
Řešení: Vytkneme

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x} \cdot \frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{1} \overset{VOAL}{=} \frac{1}{1} = 1$$

Limita $\lim_{x\to\infty} \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$ se spočítá pomocí limity složené funkce. Vnitřní funkce je $g(x) = 1 + \frac{1}{x^2}$, vnější $f(y) = \sqrt{y}$. Pro limity platí

$$\lim_{x\to\infty} 1 + \frac{1}{x^2} = 1 + 0 = 1$$

a

$$\lim_{y\to 1} \sqrt{y} = \sqrt{1} = 1.$$

Platí podmínka (S): vnější funkce $f(y) = \sqrt{y}$ je spojitá v bodě 1.

(c) $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x+2}-\sqrt{x}$

Řešení:

Rozšíříme

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x+2}-\sqrt{x} \lim_{x\to\infty} \frac{x+2-x}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}} \overset{VOAL}{=} \frac{2}{\infty+\infty} = 0.$$

Platí, že $\lim_{x\to\infty}\sqrt{x+2}=\infty$ protože $g(x)=x+2$, $f(y)=\sqrt{y}$. Navíc $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty+2=\infty$ a $\lim_{y\to\infty}=\infty$. Platí podmínka (P), protože $x+2\neq\infty$ na okolí $P(\infty,1)$.

(d) $\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$

Řešení: Vytkneme

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{|x|}{x}\cdot\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x}{x}\cdot\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{1} = \lim_{x\to-\infty} -1\cdot\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{1} = -1.$$

(e) $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x+2}+\sqrt{x}$

Řešení:

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x+2}+\sqrt{x} \overset{VOAL}{=} \infty+\infty$$

(f) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$

Řešení: Rozšíříme

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x+1-1}{x(\sqrt{x+1}+1)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{(\sqrt{x+1}+1)} \overset{VOAL}{=} \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

(g) $\lim_{x\to -2} \frac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}$

Řešení: Rozšíříme

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-2} \frac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8} &= \lim_{x\to-2} \frac{x-6+2^3}{(\sqrt[3]{(x-6)^2}-2\sqrt[3]{x-6}+2^2)(x^3+8)} \\
&= \lim_{x\to-2} \frac{x+2}{(\sqrt[3]{(x-6)^2}-2\sqrt[3]{x-6}+4)(x+2)(x^2-2x+4)} \\
&= \lim_{x\to-2} \frac{1}{(\sqrt[3]{(x-6)^2}-2\sqrt[3]{x-6}+4)(x^2-2x+4)} \\
&\overset{VOAL}{=} \frac{1}{(4+4+4)(4+4+4)} = \frac{1}{144}.
\end{aligned}$$

(h) $\lim_{x\to\infty} x(\sqrt{x^2+1}-x)$

Řešení: Rozšíříme

$$\lim_{x\to\infty} x(\sqrt{x^2+1}-x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1} \overset{VOAL}{=} \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

Bonus

3. Spočtěte limity

(a) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$

Řešení:

Vytknutím dostaneme

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^3}}}}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}} = 1.$$

(b) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x+1}}$

Řešení:

Vytknutím dostaneme

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x+1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1+\sqrt[6]{\frac{1}{x}}+\sqrt[4]{\frac{1}{x}}}{\sqrt{2+\frac{1}{x}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

(c) $\lim_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$

Řešení:

Rozšířením dostaneme

$$\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2} = \lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2} \cdot \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2} \cdot \frac{\sqrt{1+2x}+3}{\sqrt{1+2x}+3} =$$

$$= \lim_{x\to 4} \frac{1+2x-9}{x-4} \cdot \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{1+2x}+3} = \lim_{x\to 4} \frac{2(x-4)}{x-4} \cdot \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{1+2x}+3} = \lim_{x\to 4} 2\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{1+2x}+3}$$

$$= 2 \cdot \frac{2+2}{3+3} = \frac{4}{3}.$$

(d) $\lim_{x\to a+} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$, kde $a > 0$

Řešení:

Úpravou dostaneme

$$\lim_{x\to a+} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}} \overset{AL}{=} \lim_{x\to a+} \frac{1}{\sqrt{x+a}} \cdot \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x-a}} =$$

$$= \lim_{x\to a+} \frac{1}{\sqrt{x+a}} \cdot \left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt{x-a}}+1\right) \overset{AL}{=} \frac{1}{\sqrt{2a}}(0+1) = \frac{1}{\sqrt{2a}},$$

neboť

$$\lim_{x\to a+} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt{x-a}} = \lim_{x\to a+} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt{x-a}} \cdot \frac{\sqrt{x}+\sqrt{a}}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} = \lim_{x\to a+} \frac{x-a}{\sqrt{x-a}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} =$$

$$= \lim_{x\to a+} \frac{\sqrt{x-a}}{1} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} \overset{AL}{=} \frac{0}{1} \cdot \frac{1}{\sqrt{2a}} = 0.$$

(e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)$

Řešení:
Počítejme

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}-x}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}}=$$

vytknutím $\sqrt{x}$ v čitateli i jmenovateli a krácením dostaneme

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}}}}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^3}}}}+1}=\frac{1}{2}.$$

(f) $\lim\limits_{x\to0+}\left(\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}}-\sqrt{\frac{1}{x}-\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}}\right)$

Řešení:
Rozšiřujeme.

$$\lim_{x\to0+}\frac{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}-\left(\frac{1}{x}-\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}\right)}{\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}}+\sqrt{\frac{1}{x}-\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}}}=\lim_{x\to0+}\frac{\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}}{\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}}+\sqrt{\frac{1}{x}-\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}}}$$

Vytknutím $\sqrt{1/x}$ v čitateli i jmenovateli a zkrácením dostaneme

$$=\lim_{x\to0+}\frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}+\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x}+\sqrt{x^3}}+\sqrt{1-\sqrt{x+\sqrt{x^3}}}}=\frac{2}{2}=1.$$

V příkladu je možné i provést substituci $\frac{1}{x}=y$. (Technicky jde o VOLSF.) Přitom je důležité, že původní limita je jednostranná, totiž že $x\to0+$, a proto $y=\frac{1}{x}\to+\infty$. Příklad se pak převede na výpočet

$$\lim_{y\to+\infty}\left(\sqrt{y+\sqrt{y+\sqrt{y}}}-\sqrt{y-\sqrt{y+\sqrt{y}}}\right)$$

(g) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{1/3}\left[(x+1)^{2/3}-(x-1)^{2/3}\right]$

Řešení:

Rozšířením dostaneme

$$\lim_{x\to\infty} x^{1/3}[(x+1)^{2/3}-(x-1)^{2/3}] = \lim_{x\to\infty} x^{1/3}\cdot\frac{(x+1)^2-(x-1)^2}{(x+1)^{4/3}+(x+1)^{2/3}(x-1)^{2/3}+(x-1)^{4/3}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{4x\cdot x^{1/3}}{(x+1)^{4/3}+(x+1)^{2/3}(x-1)^{2/3}+(x-1)^{4/3}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{4}{(1+\frac{1}{x})^{4/3}+(1+\frac{1}{x})^{2/3}(1-\frac{1}{x})^{2/3}+(1-\frac{1}{x})^{4/3}} \overset{AL}{=} \frac{4}{1+1+1} = \frac{4}{3}.$$

4. Určete konstanty a a b, jestliže

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=0.$$

Řešení: Počítejme.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1-ax^2-ax-bx-b}{x+1}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2(1-a)-x(a+b)-b}{x+1}.$$

Limita má být rovna nule. To znamená, že v čitateli musí zmizet člen druhého i prvního řádu, a tedy máme podmínky

$$1-a=0,\quad a+b=0 \qquad\Longrightarrow\qquad a=1,\ b=-1.$$

5. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}$, kde $n\in\mathbb{N}$

Řešení: Podle již známého vzorce $(A^k-B^k)=(A-B)(A^{k-1}+A^{k-2}B+\ldots+AB^{k-2}+B^{k-1})$ dostaneme

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}\cdot\frac{\sqrt[n]{(1+x)^{n-1}}+\sqrt[n]{(1+x)^{n-2}}+\ldots+\sqrt[n]{(1+x)}+1}{\sqrt[n]{(1+x)^{n-1}}+\sqrt[n]{(1+x)^{n-2}}+\ldots+\sqrt[n]{(1+x)}+1}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+x-1}{x}\cdot\frac{1}{\sqrt[n]{(1+x)^{n-1}}+\sqrt[n]{(1+x)^{n-2}}+\ldots+\sqrt[n]{(1+x)}+1}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt[n]{(1+x)^{n-1}}+\sqrt[n]{(1+x)^{n-2}}+\ldots+\sqrt[n]{(1+x)}+1}$$

$$\overset{AL}{=}\frac{1}{1+1+\ldots+1+1}=\frac{1}{n}.$$

6. Nechť $a, A\in\mathbb{R}$. Nechť

$$\lim_{x\to a} f(x)+g(x)=A.$$

Rozhodněte, zda je možné, aby pak

(a) $\lim_{x\to a} f(x)=\infty$, $\lim_{x\to a} g(x)=-\infty$,
Řešení: Ano. Např. $f(x)=\frac{1}{(x-a)^2}$, $g(x)=\frac{-1}{(x-a)^2}+A$.

(b) ani jedna z limit $\lim_{x\to a} f(x)$, $\lim_{x\to a} g(x)$ neexistovala,
Řešení: Ano. Např. $f(x) = \frac{1}{(x-a)}$, $g(x) = \frac{-1}{(x-a)} + A$.

(c) existovala právě jedna z limit $\lim_{x\to a} f(x)$, $\lim_{x\to a} g(x)$.
Řešení: Ne. Předpokládejme, že existuje $\lim_{x\to a} f(x) = B \in \mathbb{R}$. Navíc lze psát $g(x) = f(x) + g(x) - f(x)$. Pak z aritmetiky limit máme

$$\lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} f(x) + g(x) - f(x) \overset{VOAL}{=} A - B.$$