10. cvičení – Limita funkce

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Příklady

Z grafu

1. (a) $\lim_{x\to\infty} x = \infty$
   (b) $\lim_{x\to-\infty} x^2 = \infty$
   (c) $\lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$
   (d) $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x} = \infty$
   (e) $\lim_{x\to 0+} \sqrt{x} = 0$
   (f) $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$
   (g) $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$
   (h) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\ \nexists$
   (i) $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2} = 0$
   (j) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$
   (k) $\lim_{x\to\infty} e^x = \infty$
   (l) $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$
   (m) $\lim_{x\to\infty} e^{-x} = 0$
   (n) $\lim_{x\to 0+} \ln x = -\infty$
   (o) $\lim_{x\to\infty} \sin x\ \nexists$
   (p) $\lim_{x\to 0} \cos x = 1$
   (q) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}+} \operatorname{tg} x = -\infty$
   (r) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}-} \operatorname{tg} x = \infty$
   (s) $\lim_{x\to 0+} \cot x = \infty$
   (t) $\lim_{x\to 0-} \cot x = -\infty$

Z definice

2. Určete z **definice** následující limity (či jejich neexistenci)

   (a) $\lim_{x\to 2}(x+2) = 4$
   Řešení: Je $f(x) = x+2$. Zvolme $\varepsilon > 0$. Pomocí tohoto ε stačí určit $\delta > 0$ takové, aby všechna x z prstencového okolí $(2-\delta, 2+\delta)\setminus\{2\}$ bodu 2 splňovala nerovnost

$$|f(x)-4| < \varepsilon \Leftrightarrow |(x+2)-4| < \varepsilon \Leftrightarrow |x-2| < \varepsilon. \qquad (*)$$

   Tuto nerovnici umíme vyřešit. Jejím řešením jsou všechna x z intervalu $(2-\varepsilon, 2+\varepsilon)$. Z toho je vidět, že stačí položit $\delta = \varepsilon$, neboť potom

$$x \in (2-\delta, 2+\delta) \implies x \in (2-\varepsilon, 2+\varepsilon) \implies x \text{ splňuje nerovnici } (*)$$

$$\implies \text{tvrzení o limitě je dokázáno.}$$

   (b) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x+1} = 1$
   Řešení: Volme $\varepsilon > 0$. Chceme najít K takové, aby pro všechna $x \geq K$ bylo

$$\left|\frac{x}{x+1} - 1\right| < \varepsilon.$$

   Nerovnici upravíme na vhodnější tvar pro její řešení.

$$\left|\frac{x}{x+1} - 1\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{x-(x+1)}{x+1}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{-1}{x+1}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{1}{x+1}\right| < \varepsilon.$$

   Protože pro x hledáme okolí $+\infty$, můžeme se omezit na kladná x a tím zrušit absolutní hodnotu. Pak je vidět, že při tomto omezení jsou řešením rovnice všechna x kladná taková, že $x+1 > \frac{1}{\varepsilon}$ a tedy $x > \frac{1}{\varepsilon} - 1$. Stačí tedy volit libovolné $K > \frac{1}{\varepsilon} - 1$ (popřípadě $K > 0$, pokud $\frac{1}{\varepsilon} < 1$).

(c) $\lim_{x\to 2} \frac{1}{|x-2|} = +\infty$
Řešení: Volme K reálné a omezme se na $K > 0$. Chceme najít δ tak, aby pro všechna $x \in (2-\delta, 2+\delta) \setminus \{2\}$ platilo, že

$$\frac{1}{|x-2|} \geq K \Leftrightarrow |x-2| \leq \frac{1}{K}.$$

Odtud vyplývá, že stačí volit libovolné kladné $\delta < \frac{1}{K}$.

(d) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$ $\nexists$
Řešení: V bodě nula funkce $\frac{1}{x}$ nemůže mít limitu, protože $\frac{1}{x} < \frac{-1}{\delta}$ na $(-\delta, 0)$ a $\frac{1}{x} > \frac{1}{\delta}$ na $(0,\delta)$. Pro každé reálné číslo L tedy najdeme δ tak, že L neleží v $f(-\delta, +\delta)$. Je-li pak L kladné nekonečno, potom $U = (1, +\infty)$ je okolím L, ale $f(-\delta, +\delta)$ není podmnožinou U dokonce pro žádné $\delta > 0$ (obsahuje totiž také záporná čísla). Obdobně vyloučíme záporné nekonečno.
Vyšetříme tedy jednostranné limity. Protože hodnoty $\frac{1}{x}$ se zvětšují, jdeme-li k nule zprava, máme podezření, že limita zprava bude $+\infty$. Chceme tedy dokázat, že pro libovolné $K > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že $f(x) \geq K$, pokud $x \in (0,\delta)$. Buď tedy $K > 0$ libovolné reálné číslo. Řešením nerovnice (uvědomte si, že $x, K > 0$)

$$f(x) \geq K \Leftrightarrow \frac{1}{x} \geq K \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{K},$$

dostáváme, že stačí volit $\delta < \frac{1}{K}$. Tím je důkaz hotov, $\lim_{x\to 0+} \frac{1}{x} = +\infty$.
Důkaz, že $\lim_{x\to 0-} \frac{1}{x} = -\infty$, by probíhal obdobně. Neexistence limity v nule pak též plyne z nerovnosti jednostranných limit.

(e) $\lim_{x\to 0+} \sin \frac{1}{x}$ $\nexists$
Řešení: Volme libovolné pravé prstencové okolí nuly $(0,\delta)$. Uvažme body $x_n = \frac{1}{n\pi}$. Je-li n dost velké ($\frac{1}{n\pi} < \delta$), pak $x_n \in (0,\delta)$ a $\sin x_n = 0$. Uvažme ještě body $y_m = \frac{1}{2m\pi + \frac{\pi}{2}}$. Opět pro m dost velké ($\frac{1}{2m\pi+\pi/2} < \delta$) je $y_m \in (0,\delta)$ a $\sin y_m = 1$. Je tedy vidět, že v libovolném okolí $(0,\delta)$ najdeme body, v nichž funkce $\sin \frac{1}{x}$ nabývá hodnot nula a jedna, limita zprava tedy nemůže existovat. Důkaz neexistence limity zleva probíhá analogicky, jen u před x_n a y_m napíšeme minus.

Přímo

3. (a) $\lim_{x\to 3} \frac{3x+2}{-x+1} = \frac{3\cdot 3+2}{-3+1} = \frac{-11}{2}$
   (b) $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x = \tan \frac{\pi}{4} = 1$
   (c) $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{(x-4)^2} = \text{“}\frac{1}{\infty}\text{”} = 0$
   (d) $\lim_{x\to-\infty} (x+3)^2 = (-\infty)\cdot(-\infty) = \infty$
   (e) $\lim_{x\to\infty} \frac{3}{-8-x} = \text{“}\frac{-3}{-\infty}\text{”} = 0$
   (f) $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\ln x+1} = \text{“}\frac{1}{\infty}\text{”} = 0$
   (g) $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x+2} + \sqrt{x} = \infty + \infty$

1/0

4. Spočtěte limity, příp. jednostranné limity.

(a) $\lim_{x\to 5} \frac{6}{x-5}$
Řešení: Dle Věty 4, aplikovanou na jednostranné limity. Zprava:
$f(x) = 6$, $\lim_{x\to 5+} f(x) = 6$, $6 > 0$. $g(x) = x - 5$, $\lim_{x\to 5+} g(x) = 0$, $x - 5 > 0$ na $(5, 5+1)$. Tedy $\lim_{x\to 5+} \frac{f}{g} = \infty$.
Zleva: $f(x) = 6$, $\lim_{x\to 5-} f(x) = 6$, $6 > 0$. $g(x) = x - 5$, $\lim_{x\to 5-} g(x) = 0$, $x - 5 < 0$ na $(5-1, 5)$. Tedy $\lim_{x\to 5-} \frac{f}{g} = -\infty$.
Závěr: $\displaystyle\lim_{x\to 5} \frac{6}{x-5}$ neexistuje.

(b) $\lim_{x\to 2} \frac{2}{(x-2)^2}$
Řešení: Máme $f(x) = 2$, $\lim_{x\to 2} f(x) = 2 > 0$. Navíc $g(x) = (x-2)^2$, $g(x) > 0$ na $P(2, 3)$. Z věty $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{2}{(x-2)^2} = \infty$

(c) $\lim_{x\to 4} \frac{x^2}{x^2-16}$
Řešení: (Příklad převzat tu: http://www2.gcc.edu/dept/math/faculty/BancroftED/teaching/handouts/limit_examples_from_class.pdf)
Máme $f(x) = x^2$, $\lim_{x\to 4+} f(x) = 16 > 0$. Navíc $g(x) = x^2 - 16$, $g(x) > 0$ na $(4, 5)$.
Z věty je $\displaystyle\lim_{x\to 4+} \frac{x^2}{x^2-16} = \infty$.
Zleva pak $g(x) = x^2 - 16$, $g(x) < 0$ na $(3, 4)$. Z věty je $\displaystyle\lim_{x\to 4+} \frac{x^2}{x^2-16} = -\infty$.
Závěr: limita neexistuje.

(d) $\lim_{x\to -3} \frac{x^2-2x-3}{x^2+6x+9}$ **Řešení:** (Příklad převzat tu: http://www2.gcc.edu/dept/math/faculty/BancroftED/teaching/handouts/limit_examples_from_class.pdf)
Limitu lze rozložit

$$\lim_{x\to -3} \frac{x^2-2x-3}{x^2+6x+9} = \lim_{x\to -3} \frac{(x-3)(x+1)}{(x+3)^2}.$$

Nyní lze psát $f(x) = (x-3)(x+1)$, $\lim_{x\to -3} f(x) = 12 > 0$. Navíc $g(x) = (x+3)^2$, $g(x) > 0$ na $P(-3, 42)$. Z věty $\displaystyle\lim_{x\to -3} \frac{(x-3)(x+1)}{(x+3)^2} = \infty$

(e) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{\sin x}$
Řešení: Máme $f(x) = 1$, $\lim_{x\to 0+} f(x) = 1 > 0$. Navíc $g(x) = \sin x$, $g(x) > 0$ na $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Z věty je $\displaystyle\lim_{x\to 0+} \frac{1}{\sin x} = \infty$.
Zleva pak $f(x) = 1$, $\lim_{x\to 0-} f(x) = 1 > 0$. Navíc $g(x) = \sin x$, $g(x) < 0$ na $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$. Z věty je $\displaystyle\lim_{x\to 0-} \frac{1}{\sin x} = -\infty$.
Závěr: limita neexistuje.

0/0

5. Vytkněte výraz s kořenem,

(a) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2+3x-4}{x^2-2x+1}$
Řešení: Rozložíme na

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2+3x-4}{x^2-2x+1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+4)}{(x-1)(x-1)} = \lim_{x\to 1} \frac{(x+4)}{(x-1)}.$$

Podle předchozího cvičení dostaneme

$$\lim_{x\to 1+} \frac{(x+4)}{(x-1)} = +\infty$$

a

$$\lim_{x\to 1-} \frac{(x+4)}{(x-1)} = -\infty$$

Limita tedy neexistuje.

(b) $\lim_{x\to 0} \frac{x^3-2x^2+x}{2x^3+x^2-2x}$

Řešení: Vytkneme

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3-2x^2+x}{2x^3+x^2-2x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x} \cdot \frac{x^2-2x+1}{2x^2+x-2} \overset{VOAL}{=} \frac{0-0+1}{0+0-2} = -\frac{1}{2}$$

(c) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2+4x-5}{(x-1)^2}$

Řešení: Rozložíme

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2+4x-5}{(x-1)^2} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+5)}{(x-1)^2} = \lim_{x\to 1} \frac{(x+5)}{(x-1)}.$$

Dle předchozího cvičení vyjde

$$\lim_{x\to 1+} \frac{(x+5)}{(x-1)} = \infty$$

a

$$\lim_{x\to 1-} \frac{(x+5)}{(x-1)} = -\infty$$

Závěr: limita neexistuje.

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$

Řešení: Platí, že $(x^2-1) = (x-1)(x+1)$ a $2x^2-x-1 = 2(x-1)(x+\frac{1}{2})$. Platí tedy

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{2(x-1)(x+\frac{1}{2})} = \lim_{x\to 1} \frac{x+1}{2x+1} = \frac{2}{3}.$$

(e) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$

Řešení: Snadno se ověří, že jednička je kořen, dokonce dvojnásobný. Vytknutím dostaneme

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)^2(x+2)}{(x-1)^2(x^2+2x+3)} = \lim_{x\to 1} \frac{x+2}{x^2+2x+3} = \frac{1+2}{1+2+3} = \frac{1}{2}.$$

(f) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{(x^2-x-2)^{20}}{(x^3-12x+16)^{10}}$

Rozložte polynomy na součin a pak teprve umocněte.

$$\lim_{x\to 2} \frac{(x^2-x-2)^{20}}{(x^3-12x+16)^{10}} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)^{20}(x+1)^{20}}{[(x-2)^2]^{10}(x+4)^{10}} = \lim_{x\to 2} \frac{(x+1)^{20}}{(x+4)^{10}} = \frac{3^{20}}{6^{10}} = \frac{3^{10}}{2^{10}}.$$

Bonus

6. Spočtěte limity

   (a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^m - 1}{x^n - 1}$, kde $m, n \in \mathbb{N}$

   Řešení: Rozložíme

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^m-1}{x^n-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x^{m-1}+x^{m-2}+\ldots+x+1)}{(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{x^{m-1}+x^{m-2}+\ldots+x+1}{x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x+1} = \frac{m}{n}.$$

   (b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x + x^2 + \ldots + x^n - n}{x - 1}$, kde $n \in \mathbb{N}$

   Řešení: Číslo n tu hraje roli pevně daného čísla, parametru. Postupnými rozklady dostaneme

$$\lim_{x\to 1} \frac{x+x^2+\ldots+x^n-n}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)+(x^2-1)+(x^3-1)+\ldots+(x^n-1)}{x-1} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{1+(x+1)+(x^2+x+1)+(x^3+x^2+x+1)+\ldots+(x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+1)}{1} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{1+2+3+4+\ldots+n}{1} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

7. Najděte příklad funkce (stačí obrázkem), která:

   (a) Nemá limitu v nekonečnu.
   Řešení: $f(x) = \cos x$

   (b) Nemá limitu v čísle 3.
   Řešení: $f(x) = \frac{1}{x-3}$

   (c) Má v nekonečnu limitu nekonečno.
   Řešení: $f(x) = x$

   (d) Má v nekonečnu limitu -2.
   Řešení: $f(x) = -2 + \frac{1}{x}$

   (e) Nemá limitu v 0, ale její absolutní hodnota ano.
   Řešení: $f(x) = \operatorname{sgn} x$

   (f) Není spojitá v 0.
   Řešení: $f(x) = \operatorname{sgn} x$

   (g) Je nespojitá v nekonečně mnoha bodech.
   Řešení: $f(x) = \tan x$

   (h) Má vlastní limitu v nekonečnu a je rostoucí.
   Řešení: $f(x) = \arctan x$

8. Proč ten vtip není dobře?
   Řešení: Protože $\lim_{x\to 8} \frac{1}{x-8}$ neexistuje - zprava je ∞ a zleva $-\infty$.

9. Nechť $a \in \mathbb{R}^*$. Rozhodněte zda platí:
   a) Nechť je $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$. Potom $\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = 0$.

   Řešení: Ano - aritmetika limit.
   b) Nechť je $\lim_{x\to a} f(x) = 0$. Potom je buď $\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = +\infty$ nebo $\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = -\infty$.

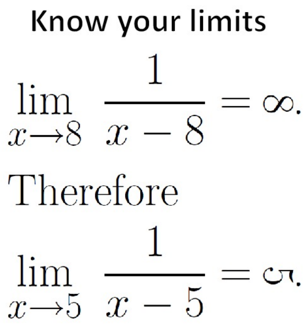

Figure 1: https://kityates.com/public-engagement/

Řešení: Ne - např. pro funkci $f(x) = x$ v 0 dostaneme $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \nexists$.
c) Nechť je $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ a $f \neq 0$ na nějakém prstencovém okolí a. Potom je $\lim_{x\to a} \frac{1}{|f(x)|} = +\infty$.
Řešení: Tvrzení platí. Jde-li $f(x) \to 0$ v bodě a, pak pro libovolné $\varepsilon > 0$ existuje prstencové okolí bodu a tak, že $|f(x)| < \varepsilon$. Je-li nyní $K > 0$, pak existuje $\varepsilon > 0$ tak, že $K < \frac{1}{\varepsilon}$ a podle předchozího najdeme prstencové okolí a tak, že $\frac{1}{|f(x)|} > \frac{1}{\varepsilon} > K$ pro x z tohoto prstencového okolí.
d1) Nechť je $\lim_{x\to a} f(x) = 0$. Potom vždy existují obě jednostranné limity $\lim_{x\to a+} \frac{1}{f(x)}$ a $\lim_{x\to a-} \frac{1}{f(x)}$, nemusí se však rovnat.
Řešení: Tvrzení neplatí. Stačí vzít $f \equiv 0$ - pak $1/f$ není definována, nelze jí tedy počítat limitu.
d2*) Co když navíc požadujeme, aby $f(x) \neq 0$ na nějakém prstencovém okolí bodu a ?
Řešení:
Tvrzení neplatí. Uvažte příklad funkce $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$, která v nule konverguje do nuly (je to nulová krát omezená) a tuto funkci předefinujme $f(\frac{1}{n\pi}) = \frac{(-1)^n}{n\pi}$, kde n jsou celá čísla (tedy v nulových bodech sinu). Potom z odhadu $|f(x)| \leq |x|$ opět plyne konvergence do nuly a funkce je dokonce různá od nuly na $\mathbb{R}$. Přitom $\frac{1}{f}$ nabývá libovolně velkých i libovolně malých hodnot na jakémkoli jednostranném okolí nuly.