9. cvičení – Rekurentně zadaná posloupnost, celá část

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

1 Rekurentně zadaná posloupnost

Teorie

Definice 1. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel a $A \in \mathbb{R}$. Řekneme, že A je *vlastní limitou posloupnosti* $\{a_n\}$, jestliže

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0,\ n \in \mathbb{N}: \quad |a_n - A| < \varepsilon.$$

Značíme $\lim_{n\to\infty} a_n = A$, $\lim a_n = A$ nebo $a_n \to A$.

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ má limitu rovnou ∞, jestliže

$$\forall K \in \mathbb{R}\, \exists n_0 \in \mathbb{N}\, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : a_n > K.$$

Věta 2 (O limitě vybrané posloupnosti)**.** Nechť $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je posloupnost reálných čísel a nechť $\lim_{n\to\infty} a_n = A$. Nechť posloupnost $\{b_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ je vybraná z posloupnosti $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Pak $\lim_{k\to\infty} b_k = A$.

Věta 3 (Limita monotónní posloupnosti)**.** Nechť $\{a_n\}$ je monotónní posloupnost. Pak existuje $\lim_{n\to\infty} a_n$.

Je-li navíc $\{a_n\}$ neklesající, pak $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Je-li $\{a_n\}$ nerostoucí, pak $\lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Důsledek 4. Každá neklesající shora omezená posloupnost je konvergentní. Podobně každá nerostoucí zdola omezená posloupnost je konvergentní.

Algoritmus

1. Ověříme, že je posloupnost dobře zadaná (nedělíme 0, pod odmocninou není záporné číslo ...).
2. Napíšeme **prvních pár členů** posloupnosti.
3. Spočteme limitu pomocí věty o **limitě vybrané posloupnosti**. Tento krok je na **dluh** - funguje pouze za předpokladu, že posloupnost má limitu, což musíme ještě ukázat.
4. Ukážeme, že je posloupnost **monotónní** (neklesající nebo nerostoucí). Neboli zda $a_n \leq a_{n+1}$ nebo $a_n \geq a_{n+1}$. Možno převést i na otázku zda
   (a) $a_n - a_{n+1} \leq 0$ (resp. $a_n - a_{n+1} \geq 0$),
   (b) $\frac{a_n}{a_{n+1}} \leq 1$ (resp. $\frac{a_n}{a_{n+1}} \geq 1$). Dáváme pozor na znaménka.

   Někdy pomůže indukce.
5. Ukážeme, že posloupnost je **omezená**.
   Někdy je dobrý nápad ukázat nejprve omezenost a až potom monotonii.
6. Uděláme **závěr**.

Hinty

AG nerovnost: pro $x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$ platí

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$$

Příklady

1. Spočtěte limitu rekurentně zadané posloupnosti
   - (a)✿ $a_1 = 0,\ a_{n+1} = \frac{a_n+3}{4}$
   - (b)❄ $a_1 = \sqrt{2},\ a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$
   - (c)♡ $a_1 = \sqrt{c},\ a_{n+1} = \sqrt{c + a_n}$, kde $c \ge 0$.
   - (d)✾ $a_1 = 10,\ a_{n+1} = 6 - \frac{5}{a_n}$
   - (e)✻ $a_1 > 0,\ a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{a_n}\right)$. Dokažte, že $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$.
   - (f)❀* Nechť $0 \le a \le 1$. $a_1 = 0,\ a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}(a - a_n^2)$.
   - (g)✰* $a_1 = a,\ a_2 = b,\ a < b$. $a_{n+1} = \frac{a_n + a_{n-1}}{2}$.
2. Určete limity z definice:

   (a) $a_n = \frac{n}{n+1}$ (b) $a_n = \frac{1}{2^n}$ (c) $a_n = n^2$

Figure 1: https://tomrocksmaths.com/2022/03/15/linear-recurrence-relations-and-how-to-solve-them/

(1a) rostoucí, $a_n \le 1$
(1b) rostoucí, $a_n \le 2$
(1c) rostoucí, $a_n \le \sqrt{c} + 1$
(1d) $a_n \ge 5$, klesající
(1e) z AG nerovnosti: $a_n \ge 1$, klesající
(1f) nechť $a_n = \sqrt{a} - \varepsilon$, kde $\varepsilon \le \sqrt{a}$, pak $a_{n+1} \le \sqrt{a}$
$a_n \ge \sqrt{a}$, rostoucí
(1g) ukažte: $a_{2n-1} \le a_{2n+1} \le a_{2n+2} \le a_{2n}$
pak a_{2n} je klesající, pak a_{2n-1} je rostoucí, $a_1 \le a_n \le a_2$
ukažte: $a_3 - a_2 = a_1 - a_3$, pak $a_{n+1} - a_n = a_{n-1} - a_{n+1}$.

2 Celá část

Teorie

Definice 5. Nechť $x \in \mathbb{R}$. Potom číslo $k \in \mathbb{Z}$ splňující $k \le x < k+1$ nazýváme *celou částí* čísla x a značíme $\lfloor x \rfloor$ nebo $[x]$.

Hinty

$$\begin{aligned} x-1 < \lfloor x \rfloor &\le x \\ \lfloor x \rfloor \le \ x \ &< \lfloor x \rfloor + 1 \end{aligned}$$

$$1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Algoritmus

K dispozici máme dva postupy:

1. Použijeme odhady $x-1 < \lfloor x \rfloor \le x$ a aplikujeme **dva policajty**.
   Varianta: jde-li posloupnost k ∞, stačí spodní policajt.
2. Pro typ $\lim_{n\to\infty}[a_n]$ (celá část kolem celé posloupnosti a_n): Spočteme $\lim_{n\to\infty} a_n = A$, A je typicky celé číslo. Pak ukážeme, zda jde ke své limitě **shora** (celé části to neublíží) nebo **zdola** (celá část vyjde o 1 menší).

Příklady

3. Spočtěte limity s celou částí

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{[\sqrt{n}]}{\sqrt{n}}$

(b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\left[\frac{1+\sqrt{n}}{2}\right] + \left[\frac{n}{2}\right]}{n}$

(c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n\log n}{\left[\frac{n}{2}\right]}$

(d) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^3 - \left[\frac{n^3}{100}\right]\cdot 100}{\sqrt{n}}$

(e) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left[\sqrt[3]{n^3+8n^2} - \sqrt[3]{n^3+2n^2}\right]$

(f) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left[\sqrt[3]{n^3+8n^2} - \sqrt[3]{n^3+2n^2}\right] \cdot \frac{(n^2+n+1)^{10} - (n+1)^{20}}{(n^2+1)^{10} - (n+1)^{20}}$

(g) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\left[\sqrt{n^3+1}\right] + \left[\sqrt{n^3-1}\right]}{\sqrt[n]{1^n+2^n+\cdots n^n}}$

(h) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left[\sqrt[4]{n^4+4n^3} - n\right]$

(i) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n\sqrt{n}\,\sqrt[n]{(n+1)^n + n^{n+1}}}{[\sqrt{n}] + [2\sqrt{n}] + \cdots + [n\sqrt{n}]}$

(j) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}[kx]$, $x \in \mathbb{R}$

Teorie

4. Buď dáno $x \in (0, \infty)$. Označme $[x]$ celou část čísla x a $\{x\} = x - [x]$ desetinný rozvoj čísla x. (Například $\{\pi\} = 0,1415926\ldots$.) Sestrojme posloupnost

$$\{x\},\ \{2x\},\ \{3x\},\ \ldots,\ \{nx\},\ \ldots$$

   Dokažte, že:

   (a) Je-li x celé, má posloupnost limitu 0.

   (b)✿ Je-li x racionální necelé, tj. $x = r/s$, má posloupnost hromadné body $0, \frac{1}{s}, \frac{2}{s}, \ldots, \frac{s-1}{s}$.

   (c)** Je-li x iracionální, vyplňují hromadné body posloupnosti celý interval $[0, 1]$.

5. **Pomocný příklad k (c).** Dokažte:

   (a)❀ Nechť $\theta \in \mathbb{R}$ a $t \in \mathbb{N}$. Potom existují celá čísla p_t, q_t tak, že $|q_t\theta - p_t| < \frac{1}{t}$. Přitom $0 < q \leq t$.

   (b)♡ Jestliže θ je iracionální, je $\lim\limits_{t\to\infty} q_t = +\infty$.

(4b) Uvažujte r, s nesoudělná a zkoumejte zlomky $\frac{r}{s}, \frac{2r}{s}, \frac{3r}{s}, \ldots$

(5a) Pro čísla $k = 0, 1, \ldots, t$ položme $r_k = \lfloor k\theta \rfloor$. Rozdělme interval $[0, 1]$ na části o délce $1/t$. Zkoumejme čísla $x_k = k\theta - r_k$ a kde leží v intervalu.

(5b) Sporem.