8. cvičení – Limsup, liminf

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Příklady

1. Spočtěte limitu, neexistuje-li, najděte limes superior a inferior a hromadné body
   (a) $\lim_{n\to\infty} \sin\left(n\frac{\pi}{4}\right)$
   Řešení: Posloupnost postupně nabývá hodnot
   $$\frac{\sqrt{2}}{2}, 1, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -1, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \dots$$
   Hromadné body:
   $$\left\{0, \pm 1, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$$
   $\limsup a_n = 1$, $\liminf a_n = -1$
   (b) $\lim_{n\to\infty} 3\left(1-\frac{1}{n}\right) + 2(-1)^n$
   Řešení: Pro $n = 2k-1$, $k = 1, 2, \dots$, (tedy pro lichá n) máme
   $$\lim k \to \infty 3 - \frac{3}{2k-1} - 2 = \lim_{k\to\infty} 1 - \frac{3}{2k-1} = 1.$$
   Pro $n = 2k$, $k = 1, 2, \dots$, (tedy pro sudá n) máme
   $$\lim_{k\to\infty} 3 - \frac{3}{2k} + 2 = \lim_{k\to\infty} 5 - \frac{3}{2k} = 5.$$
   Hromadné body jsou $\{1, 5\}$, $\limsup a_n = 5$, $\liminf a_n = 1$.
   (c) $\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2 + 2n + n\sin 2n}{n\cos 3n + (2n + \sin 4n)^2}$
   Řešení:
   Vytkneme nejrychlejší člen:
   $$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2 + 2n + n\sin 2n}{n\cos 3n + (2n + \sin 4n)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2 + \frac{2}{n} + \frac{\sin 2n}{n}}{\frac{\cos 3n}{n} + 4 + \frac{4\sin 4n}{n} + \frac{\sin^2 4n}{n^2}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$
   Protože limita existuje, tak hromadným bodem je jen $\frac{1}{2}$ a $\limsup a_n = \liminf a_n = \lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$.
   (d) $\lim_{n\to\infty} (-1)^{n-1}\left(2 + \frac{3}{n}\right)$
   Řešení: Posloupnost není konvergentní. Má jen dva hromadné body, a to limity vybraných podposloupností $x_{2n} = -(2 + \frac{3}{2n})$ a $x_{2n+1} = (2 + \frac{3}{2n+1})$. Proto
   $$\limsup x_n = 2, \qquad \liminf x_n = -2.$$

(e) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n}{n} + \dfrac{1+(-1)^n}{2}$

Řešení: Posloupnost má jen dva hromadné body, a to limity vybraných podposloupností $x_{2n} = \frac{1}{n} + 1$ a $x_{2n+1} = \frac{1}{n}$. Proto

$$\limsup x_n = 1, \qquad \liminf x_n = 0.$$

(f) $\lim\limits_{n\to\infty} 1 + \dfrac{n}{n+1} \cos \dfrac{n\pi}{2}$

Řešení: Uvažujme nejprve posloupnost $b_n = \frac{n}{n+1} \cos \frac{n\pi}{2}$. Protože $\cos \frac{n\pi}{2}$ nabývá popořadě hodnot $0, -1, 0, 1$, jsou nenulové pouze sudé členy posloupnosti. Ty jsou rovny

$$x_{4n+2} = -\frac{4n+2}{4n+3} \to -1, \qquad x_{4n} = \frac{4n}{4n+1} \to 1.$$

Liché členy posloupnosti jsou nulové.
Hromadné body posloupnosti jsou tedy $\{-1, 0, 1\}$ a

$$\limsup b_n = 1, \qquad \liminf b_n = -1.$$

Pro posloupnost $a_n = 1 + \frac{n}{n+1} \cos \frac{n\pi}{2}$ pak máme hromadné body $\{0, 1, 2\}$ a

$$\limsup b_n = 2, \qquad \liminf b_n = 0.$$

(g) $\lim\limits_{n\to\infty} 1 + 2(-1)^{n+1} + 3 \cdot (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$

Řešení: Člen $n(n-1)/2$ je sudý pro $n = 4k$ a $n = 4k+1$, naopak pro $n = 4k+2$ a $n = 4k+3$ je lichý. Posloupnost x_n tedy tvoří čtyři konstantní podposloupnosti:

$$x_{4n} = 1-2+3 = 2, \quad x_{4n+1} = 1+2+3 = 6, \quad x_{4n+2} = 1-2-3 = -4, \quad x_{4n+3} = 1+2-3 = 0.$$

Z toho plyne, že $\limsup x_n = 6$ a $\liminf x_n = -4$. Hromadné body jsou $\{-4, 0, 2, 6\}$.

(h) $\lim\limits_{n\to\infty} (\cos \pi n) n$

Řešení: Podposloupnosti $x_{2n} = 2n$ a $x_{2n+1} = -2n-1$ rostou do $+\infty$, resp. klesají do $-\infty$. Tedy

$$\limsup x_n = \sup x_n = +\infty, \qquad \liminf x_n = \inf x_n = -\infty.$$

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} -n[2 + (-1)^n]$

Řešení: Posloupnost je konvergentní, protože $-n[2 + (-1)^n] \leq -n \to -\infty$. Proto

$$\limsup x_n = \liminf x_n = \inf x_n = -\infty.$$

(j) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n(-1)^n}{n+1} + \sqrt[n]{2}$

Řešení: Pro $n = 2k-1$, $k = 1, 2, \ldots$, (tedy pro lichá n) máme

$$\lim_{k=1} \frac{-2(2k-1)}{2k+1+1} + \sqrt[2k+1]{2} = -2 + 1 = -1$$

Pro $n = 2k$, $k = 1, 2, \ldots$, (tedy pro sudá n) máme

$$\lim_{k=1} \frac{2(2k)}{2k+1} + \sqrt[2k]{2} = 2 + 1 = 3$$

Tedy $\limsup a_n = 3$, $\liminf a_n = -1$, hromadné body: $\{-1, 3\}$.

2. (a) Nechť M je konečná množina přirozených čísel. Najděte posloupnost a_n takovou, že její množina hromadných bodů je rovna M.
Řešení: Nechť M je tvaru $\{m_1, m_2, \ldots, m_k\}$. Hledaná posloupnost je pak tvaru $a_1 = m_1$, $a_2 = m_2, \ldots$, $a_k = m_k$, $a_{k+1} = m_1$, $a_{k+2} = m_2, \ldots$ (cyklus přes M).

(b) Najděte posl. a_n takovou, že její množina hromadných bodů je rovna $\mathbb{N} \cup \infty$.
Řešení: Např. posloupnost $\{a_n\} = \{1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$.

(c) Ukažte, že nelze najít takovou posloupnost, aby množina jejích hromadných bodů byla rovna $\mathbb{N}$.
Řešení: Myšlenka:
Nechť $\{a_n\}$ je taková posloupnost, že množina jejích hromadných bodů je rovna $\mathbb{N}$. Pak lze vybrat podposloupnosti takové, že

$$\begin{array}{cccccc}
\color{red}{a_1^1}, & a_2^1, & a_3^1, & a_4^1, & \ldots & \to 1 \\
a_1^2, & \color{red}{a_2^2}, & a_3^2, & a_4^2, & \ldots & \to 2 \\
a_1^3, & a_2^3, & \color{red}{a_3^3}, & a_4^3, & \ldots & \to 3 \\
a_1^4, & a_2^4, & a_3^4, & \color{red}{a_4^4}, & \ldots & \to 4
\end{array}$$

Navíc můžeme předpokládat, že $a_1^1 \geq 1 - \frac{1}{2}$, $a_2^2 \geq 2 - \frac{1}{2}, \ldots$, $a_n^n \geq n - \frac{1}{2}$.
Vybereme diagonálně prvky $a_1^1, a_2^2, a_3^3, a_4^4, \ldots$. Ty vytvoří posloupnost jdoucí do ∞, což je spor.

3. (a)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n}$$

Řešení:
Použijeme větu o součinu omezené a mizející posloupnosti, $1 \geq \sin n \leq 1$, $\lim_{n\to\infty} 1/n = 0$, tedy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$$

(b)

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(1+\frac{2}{n}\right)^n + \left(1-\frac{1}{n}\right)^n}$$

Řešení:
Odhadneme

$$\sqrt[n]{\left(1+\frac{2}{n}\right)^n} \leq \sqrt[n]{\left(1+\frac{2}{n}\right)^n + \left(1-\frac{1}{n}\right)^n} \leq \sqrt[n]{2\left(1+\frac{2}{n}\right)^n}$$

Navíc

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(1+\frac{2}{n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{2}{n}\right) = 1$$

a

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2\left(1+\frac{2}{n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} \cdot \left(1+\frac{2}{n}\right) = 1 \cdot (1+0)$$

Ze dvou policajtů tedy

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(1+\frac{2}{n}\right)^n + \left(1-\frac{1}{n}\right)^n} = 1$$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n \dfrac{n^2 \sqrt[n]{n}}{n^3 + \sqrt[2n]{n}}$

Řešení: Prve spočteme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 \sqrt[n]{n}}{n^3 + \sqrt[2n]{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^3} \cdot \frac{\sqrt[n]{n}}{1 + \frac{(\sqrt[n]{n})^{\frac{1}{2}}}{n^3}} \overset{VOAL}{=} 0 \cdot \frac{1}{1+0} = 0.$$

Z věty o omezené a nulové posloupnosti pak máme i

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^n \frac{n^2 \sqrt[n]{n}}{n^3 + \sqrt[2n]{n}} = 0$$

(d)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3+n+1}{n^\alpha}$$

$\alpha \in \mathbb{N}$

Řešení:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3+n+1}{n^\alpha} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{n^\alpha} \frac{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}}{1} = \begin{cases} 1, & \alpha = 3 \\ 0, & \alpha > 3 \\ \infty, & \alpha < 3 \end{cases}$$

(e)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2 + (3n+2)^4}{n^\alpha + n^4}$$

$\alpha \in \mathbb{N}$

Řešení:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2 + (3n+2)^4}{n^\alpha + n^4} = \lim_{n\to\infty} n^4 \frac{(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2})^2 + (3+\frac{2}{n})^4}{n^\alpha + n^4} = \begin{cases} 81/2, & \alpha = 4 \\ 0, & \alpha > 4 \\ 81, & \alpha < 4 \end{cases}$$

(f)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n-2)^4 - (n^2+1)^2}{n^\alpha + n^2}$$

$\alpha \in \mathbb{N}$ **Řešení:**

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n-2)^4 - (n^2+1)^2}{n^\alpha + n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n^4 - 2\cdot 4n^3 + \cdots + 2^4)^4 - (n^4+2n^2+1)}{n^\alpha + n^2}$$
$$= \begin{cases} -8, & \alpha = 3 \\ 0, & \alpha > 3 \\ -\infty, & \alpha < 3 \end{cases}$$

(g)

$$\lim_{n\to+\infty} n^\alpha\left(\sqrt[3]{n^2+1}-\sqrt[3]{n^2-1}\right),$$

kde $\alpha\in\mathbb{R}$

Řešení: Odstraněním odmocniny z čitatele pomocí vhodného rozšíření (viz jmenovatel následujícího zlomku) máme

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to+\infty} n^\alpha\left(\sqrt[3]{n^2+1}-\sqrt[3]{n^2-1}\right)\\
&\quad=\lim_{n\to+\infty} n^\alpha\frac{(n^2+1)-(n^2-1)}{\sqrt[3]{(n^2+1)^2}+\sqrt[3]{n^2+1}\sqrt[3]{n^2-1}+\sqrt[3]{(n^2-1)^2}}\\
&\quad=\lim_{n\to+\infty}\frac{2n^\alpha}{\sqrt[3]{(n^2+1)^2}+\sqrt[3]{n^2+1}\sqrt[3]{n^2-1}+\sqrt[3]{(n^2-1)^2}}
\end{aligned}$$

a vytknutím $n^{4/3}$ ze jmenovatele dostaneme

$$=\lim_{n\to+\infty} n^{\alpha-4/3}\frac{2}{\sqrt[3]{(1+1/n^2)^2}+\sqrt[3]{1+1/n^2}\sqrt[3]{1-1/n^2}+\sqrt[3]{(1-1/n^2)^2}}$$

a) Pro $\alpha=4/3$ vyjde

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{2}{\sqrt[3]{(1+1/n^2)^2}+\sqrt[3]{1+1/n^2}\sqrt[3]{1-1/n^2}+\sqrt[3]{(1-1/n^2)^2}}=\frac{2}{1+1+1}=\frac{2}{3}$$

b) Pro $\alpha>4/3$ vyjde

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} n^{\alpha-4/3}\cdot\lim_{n\to+\infty}\frac{2}{\sqrt[3]{(1+1/n^2)^2}+\sqrt[3]{1+1/n^2}\sqrt[3]{1-1/n^2}+\sqrt[3]{(1-1/n^2)^2}}&\\
=(+\infty)\cdot\frac{2}{3}=+\infty&
\end{aligned}$$

c) Pro $\alpha<4/3$ vyjde

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} n^{\alpha-4/3}\cdot\lim_{n\to+\infty}\frac{2}{\sqrt[3]{(1+1/n^2)^2}+\sqrt[3]{1+1/n^2}\sqrt[3]{1-1/n^2}+\sqrt[3]{(1-1/n^2)^2}}&\\
=0\cdot\frac{2}{3}=0.&
\end{aligned}$$

(h) Určete $a,b\in\mathbb{R}$ tak, aby

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt[3]{n^3-n}-an-b)=0$$

Řešení:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}(\sqrt[3]{n^3-n}-an-b)&=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3-n-(an+b)^3}{(n^3-n)^{2/3}+(n^3-n)^{1/3}(an+b)+(an+b)^2}\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3-n-(a^3n^3+3a^2n^2b+3anb^2+b^3)}{(n^3-n)^{2/3}+(n^3-n)^{1/3}(an+b)+(an+b)^2}
\end{aligned}$$

Vedoucí člen ve jmenovateli je n^2, v čitateli $n^3(1-a^3)$. Aby byla limita vlastní, musí být $a=1$. Pak v čitateli zbývá $3a^2n^2b$, které se také musí vynulovat, jinak by limita byla >0. Tedy $b=0$.

(i) Určete $\alpha > 0$ tak, aby následující limita byla vlastní

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n^\alpha + 1)^3 + \alpha(-1)^n}{n^2(\sqrt{n^2+1} - n)}$$

Řešení:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{(n^\alpha + 1)^3 + \alpha(-1)^n}{n^2(\sqrt{n^2+1} - n)} &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n^\alpha + 1)^3 + \alpha(-1)^n}{n^2(\sqrt{n^2+1} - n)} \cdot \frac{\sqrt{n^2+1}+n}{\sqrt{n^2+1}+n} \\
&= \lim_{n\to\infty} n^{3\alpha} \frac{(1+\frac{1}{n^\alpha})^3 + \frac{\alpha(-1)^n}{n^{3\alpha}}}{n^2} \cdot n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} n^{3\alpha-1}\left[\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right)^3 + \frac{\alpha(-1)^n}{n^{3\alpha}}\right] \cdot \left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1\right) \\
&= \begin{cases} 2, & \alpha = 1/3 \\ \infty, & \alpha > 1/3 \\ 0, & \alpha < 1/3 \end{cases}
\end{aligned}$$

(j)

$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt{4n^2 - n} - 2n)$$

Řešení:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} (\sqrt{4n^2 - n} - 2n) &= \lim_{n\to\infty} (\sqrt{4n^2 - n} - 2n) \cdot \frac{\sqrt{4n^2-n}+2n}{\sqrt{4n^2-n}+2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{-n}{\sqrt{4n^2-n}+2n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n} \frac{-1}{\sqrt{4-\frac{1}{n}}+2} = -\frac{1}{4}
\end{aligned}$$

(k)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)! + (n+1)!}{(n+2)! - (n+1)!}$$

Řešení:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)! + (n+1)!}{(n+2)! - (n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)+1}{(n+2)-1} = 1.$$

(l)

$$\lim_{n\to\infty} (1 + \sin n\pi)$$

Řešení:

$$\lim_{n\to\infty} (1 + \sin n\pi) \overset{VOAL}{=} 1 + \lim_{n\to\infty} \sin n\pi = 1 + 0 = 1.$$