# 7. cvičení – éčko

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

## Příklady

1. (a)
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{3n}=e^3$$

**Řešení:**

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{3n} &= \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)^{3}\\ &\overset{VOAL}{=} \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\\ &= e\cdot e\cdot e=e^3\end{aligned}$$

(b)
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{n}=\sqrt{e}$$

**Řešení:**

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{\frac{2n}{2}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}}$$

Z věty o limitě vybrané posloupnosti máme

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}=e$$

Pokud použijeme větičku o limitě a odmocnině, dostaneme

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}}=\sqrt{e}$$

(c)
$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}=\frac{1}{e}$$

**Řešení:**

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n} &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n-1}\right)^{-n}\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1+1}\right)^{-1}\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\right)^{-1}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{1}\right)^{-1}\\ &\overset{VOAL}{=}\frac{1}{e}\end{aligned}$$

(d)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n=\frac{1}{e^2}$$

**Řešení:**

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n&=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1-1-1}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n+1}\right)^n\\&=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n+1}\right)^{n+1-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1-\frac{2}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1-\frac{2}{n+1}\right)}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{\frac{n+1}{-2}}\right)^{n+1}}{\left(1-\frac{2}{n+1}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{\frac{n+1}{-2}}\right)^{\frac{n+1}{-2}\cdot(-2)}}{\left(1-\frac{2}{n+1}\right)}\\&\overset{VOAL}{=}\frac{\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{n+1}{-2}}\right)^{\frac{n+1}{-2}}\right)^{-2}}{\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n+1}\right)}=\frac{e^{-2}}{1}\end{aligned}$$

(e)

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n=1$$

**Řešení:**

$$\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n=\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{n}}=\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}}$$

Z Věty o limitě vybrané posloupnosti máme, že

$$\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\to e,$$

tedy lze nalézt $n_0$ tak, že pro každé $n\geq n_0$ máme

$$\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}<10.$$

a

$$1<\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}.$$

Dohromady máme odhady:

$$1=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1}\leq\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}}\leq\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{10}=1,$$

tedy z Věty o dvou policajtech máme

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}}=1.$$

(f) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$, $x\in\mathbb{R}$

**Řešení:** Uvažujme tři případy.

i. Nechť $x>0$, pak

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n}{x}}\right)^{\frac{n}{x}\cdot x} = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{n}{x}}\right)^{\frac{n}{x}}\right)^x = e^x$$

Využili jsme posloupnost $x_n = n/x$, pro niž platí $x_n\to\infty$.

ii. Nechť $x<0$, pak $-x>0$ a:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+x}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\frac{n}{n+x}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{-x}{n+x}\right)^n}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{\frac{n+x}{-x}}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{\frac{n+x}{-x}}\right)^{n+x-x}}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{\frac{n+x}{-x}}\right)^{n+x}}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{1}{\frac{n+x}{-x}}\right)^{-x}}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\left(1+\frac{1}{\frac{n+x}{-x}}\right)^{\frac{n+x}{-x}}\right)^{-x}}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{1}{\frac{n+x}{-x}}\right)^{-x}}\\
&= \frac{1}{e^{-x}}\cdot\frac{1}{1^{-x}} = e^x\end{aligned}$$

Využili jsme posloupnost $x_n = \frac{n+x}{-x}$, pro niž platí $x_n\to\infty$.

iii. Nechť $x=0$. Pak $a_n = 1$ pro každé $n\in\mathbb{N}$, tedy $\lim_{n\to\infty} a_n = 1 = e^0$.

(g) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+\sin n}\right)^n = e$

**Řešení:**

Použijeme dva policajty

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n \le \left(1+\frac{1}{n+\sin n}\right)^n \le \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n$$

Navíc platí

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1-1} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)} = \frac{e}{1}$$

a

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\cdot\left(1+\frac{1}{n-1}\right) = e$$

Ze dvou policajtů tedy dostáváme

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+\sin n}\right)^n = e$$

(h) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+4}{n-2}\right)^{n+1} = e^6$

**Řešení:**

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+4}{n-2}\right)^{n+1} &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-2+6}{n-2}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{6}{n-2}\right)^{n-2+3}\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{6}{n-2}\right)^{3}\cdot\left(1+\frac{6}{n-2}\right)^{n-2} =\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{6}{n-2}\right)^{3}\cdot\left(1+\frac{1}{\frac{n-2}{6}}\right)^{\frac{n-2}{6}\cdot 6} =\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{6}{n-2}\right)^{3}\cdot\left(\left(1+\frac{1}{\frac{n-2}{6}}\right)^{\frac{n-2}{6}}\right)^{6} \overset{VOAL}{=} 1\cdot e^6
\end{aligned}$$

(i) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-1}{n^2-3}\right)^{n+1} = 1$

**Řešení:**

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-1}{n^2-3}\right)^{n+1} &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-3+2}{n^2-3}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n^2-3}\right)^{\frac{n(n+1)}{n}}\\
&= \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(1+\frac{2}{n^2-3}\right)^{n^2-3+3+n}}\\
&= \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(1+\frac{2}{n^2-3}\right)^{3}}\sqrt[n]{\left(1+\frac{2}{n^2-3}\right)^{n}}\sqrt[n]{\left(1+\frac{2}{n^2-3}\right)^{n^2-3}}\\
&= \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(1+\frac{2}{n^2-3}\right)^{3}}\sqrt[n]{\left(1+\frac{2}{n^2-3}\right)^{n}}\sqrt[n]{\left(\left(1+\frac{1}{\frac{n^2-3}{2}}\right)^{\frac{n^2-3}{2}}\right)^{2}}\\
&\overset{VOAL}{=} 1\cdot 1\cdot 1.
\end{aligned}$$

Na poslední limitu užijeme dva policajty, protože

$$\left(\left(1+\frac{1}{\frac{n^2-3}{2}}\right)^{\frac{n^2-3}{2}}\right)^{2}\to e^2,$$

budou tak od jistého $n_0$ platit odhady

$$1\le\left(\left(1+\frac{1}{\frac{n^2-3}{2}}\right)^{\frac{n^2-3}{2}}\right)^{2}\le 10.$$

2. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost, $\lim_{n\to\infty} a_n = A$. Co můžeme říct o $\lim\limits_{n\to+\infty}(-1)^n a_n$ ?

**Řešení:** Limita existuje, právě když $\lim a_n = 0$.
Jestliže $\lim a_n = 0$, potom $\lim(-1)^n a_n = 0$ podle věty o limitě součinu omezené posloupnosti a posloupnosti jdoucí k nule.
Jestliže $\lim a_n = A \neq 0$, pak pro sudé členy máme limitu rovnu $A$, pro liché členy $-A$. Což je spor s jednoznačností limity a větou o limitě vybrané posloupnosti.

3. Existují posloupnosti $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ takové, že $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$ a $\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n$ neexistuje?
**Řešení:** Ano. Např. $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$, $b_n = n^2$. Pak $a_n b_n = (-1)^n n$.
4. Nechť $\{a_n\}$ je konvergentní posloupnost racionálních čísel. Musí být limita racionální číslo?
**Řešení:** Ne. Např. posloupnost

$$\begin{aligned}
a_1 &= 3 \\
a_2 &= 3,1 \\
a_3 &= 3,14 \\
a_4 &= 3,141 \\
a_5 &= 3,1415 \\
a_6 &= 3,14159 \\
a_7 &= 3,141592 \\
a_8 &= 3,1415926 \\
&\downarrow \\
&\pi
\end{aligned}$$

5. Nechť $\{a_n\}$ je omezená posloupnost taková, že $a_{n+2} \geq a_n$. Musí mít $a_n$ limitu?
**Řešení:** Nikoli. Např. $(-1)^n \geq (-1)^{n+2}$.