7. cvičení – éčko

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Teorie

Věta 1 (O limitě vybrané posloupnosti)**.** Nechť $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je posloupnost reálných čísel a nechť $\lim_{n\to\infty} a_n = A$. Nechť posloupnost $\{b_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ je vybraná z posloupnosti $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Pak $\lim_{k\to\infty} b_k = A$.

Fakta

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

Nechť x_n je posloupnost, $x_n \to \infty$. Pak

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e.$$

Příklady

1. Spočtěte limity

(a) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{3n}$

(b) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{n}$

(c)❀ $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}$

(d) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n}$

(e)❄ $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n}$

(f)★ $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n}$, $x\in\mathbb{R}$

(g)❀ $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+\sin n}\right)^{n}$

(h) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+4}{n-2}\right)^{n+1}$

(i)♡ $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-1}{n^2-3}\right)^{n+1}$

Bonus

2. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost, $\lim_{n\to\infty} a_n = A$. Co můžeme říct o $\lim\limits_{n\to+\infty}(-1)^n a_n$?
3. Existují posloupnosti $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ takové, že $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$ a $\lim_{n\to\infty} a_n b_n$ neexistuje?
4. Nechť $\{a_n\}$ je konvergentní posloupnost racionálních čísel. Musí být limita racionální číslo?
5. Nechť $\{a_n\}$ je omezená posloupnost taková, že $a_{n+2} \geq a_n$. Musí mít a_n limitu?

(1c) Spočtěte převrácenou hodnotu
(1e) Veďe na 2 policajty
(1f) Uvažujte zvlášť $x>0$, $x<0$
(1g) Veďe na 2 policajty, $-1\leq \sin n \leq 1$
(1i) Veďe na 2 policajty