6. cvičení – Růstová škála

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Teorie

Věta 1 (O dvou policajtech)**.** Nechť $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ a $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jsou tři posloupnosti reálných čísel, splňující

(i) $\exists\, n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0:\ a_n \leq c_n \leq\ b_n,$

(ii) $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim b_n = A \in \mathbb{R}.$

Pak

$$\lim c_n = A.$$

Věta 2. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost s **kladnými** členy. Nechť následující limita **existuje**:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = A.$$

Pak také

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = A.$$

Opačná implikace neplatí.

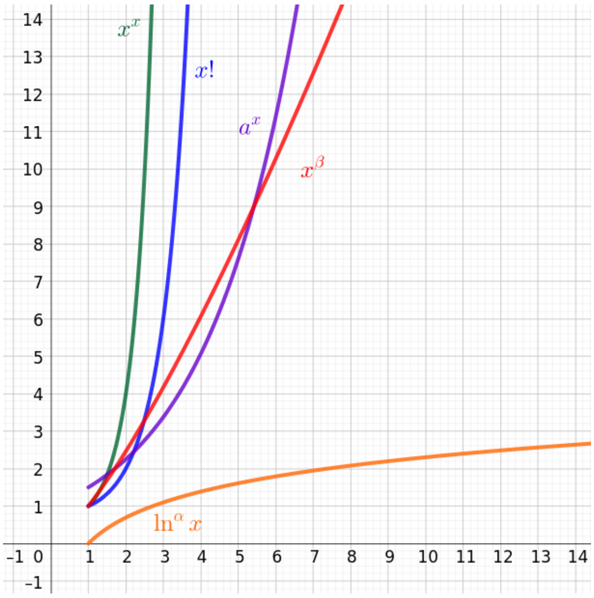
Fakta

1. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$
2. $a > 1$: $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!} = 0.$
3. $\beta > 0,\ a > 1$: $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n^\beta}{a^n} = 0.$
4. $\alpha > 0,\ \beta > 0$: $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\log^\alpha n}{n^\beta} = 0.$

$$\log^\alpha n \ll n^\beta \ll a^n \ll n! \ll n^n$$

Nechť $\alpha > 0$, pak:

1. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\alpha} = 1$
2. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$
3. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^\alpha} = 1$
4. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$



Příklady

1. Určete limity

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^n + n^2}{n^3 + n!}$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}}$

(c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1^n + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n}{5,0001^n}$

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^n + n^5 + (n+1)!}{n(n^6 + n!)}$

(e) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\log n + n^3 + \frac{1}{n} + e^n + 5^n}{\log_{10} n + n^4 + 5^n + n^3 + 4^n}$

(f)❄ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+2)! + (n+1)!}{(n+2)! - (n+1)!}$

(g)❀ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(\log(n^2))^2}{\sqrt{n + 5\log^2 n} - \sqrt{n + 2\log^2 n}} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

2. Určete limity

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2 + 2^n + 3^n}$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{4^n + 3^n \sin(2^n)}{5^n + 4^n \cos(n!)}}$

(c)❀ $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n + c^n}$ pro $a, b, c > 0$

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{\sqrt[n]{a^n + b^n}}{\sqrt[n]{a^{2n} + b^{2n}}} \right)$ pro $a > b > 0$

(e)✤ $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{((n+2)^2 - (n+1)^2)^{n+1}}{((n+1)^3 - n^3 - 3n^2)^{n-1}}}$

(f)✻ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^{\cdot}\sqrt{n^2 + n} - n \cdot \sqrt{4^n + 1}}{\sqrt[n]{2^{n^2} + 1}}$

3. Spočtěte limity

(a)♡ $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sqrt{3^n + 2 \cdot 2^n} - \sqrt{3^n + 2^n}}$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{2^n + 3^n}}{\sqrt[2n]{4^n + \sqrt{n}}}$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n \dfrac{n^2 \sqrt[n]{n}}{n^3 + \sqrt[2n]{n}}$

4. Jak to dopadne s posloupnostmi? (Divergentní znamená jak jdoucí do nekonečna, tak oscilující.)

   (a) Nechť posloupnost x_n je konvergentní a posloupnost y_n je divergentní. Je možné říci, že posloupnosti a) $x_n + y_n$, b) $x_n y_n$ jsou také divergentní?

   (b) Nechť posloupnosti x_n a y_n jsou divergentní. Je možné říci, že posloupnosti a) $x_n + y_n$, b) $x_n y_n$ jsou také divergentní?

   (c) Nechť $\lim x_n = 0$ a y_n je libovolná posloupnost. Je možné říci, že $\lim(x_n y_n) = 0$?

   (d) Nechť $\lim(x_n y_n) = 0$. Je možné říci, že platí buď $\lim x_n = 0$ nebo $\lim y_n = 0$?

(1f) Vytkneme $(n+1)!$

(1g) Odmocniny dle vzorce $A^2 - B^2$. Navíc $\log n^2 = 2 \log n$.

(2c) BÚNO $a \geq b \geq c$.

(2e) Roznásobíme závorky pod odmocninou, pak vytkneme.

(2f) Odmocniny dle vzorce $A^2 - B^2$.

(3a) Odmocniny dle vzorce $A^2 - B^2$.