4. cvičení – Indukce, supremum + infimum

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Indukce

1. Nechť $n \in \mathbb{N}$. Matematickou indukcí dokažte, že

   (a) $\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
   Řešení:

   - Krok 1: pro $n = 1$:
   $$1^2 = \frac{1(1+1)(2\cdot 1+1)}{6}$$
   - Krok 2: předpokládejme, že pro pevné $n \in \mathbb{N}$ platí
   $$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
   - Krok 3: chceme tvrzení ukázat pro $n+1$. Neboli chceme ukázat, že
   $$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

   Máme
   $$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \left[\sum_{k=1}^{n} k^2\right] + (n+1)^2 \overset{\text{ind. př}}{=} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ &= \frac{(n+1)[n(2n+1)+6(n+1)]}{6} \\ &= \frac{(n+1)[2n^2+7n+6]}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}\end{aligned}$$

   (b) $\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = 1\cdot 2 + 2\cdot 3 + \cdots + n(n+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$
   Řešení:

   - Krok 1: pro $n = 1$:
   $$1(1+1) = \frac{1}{3}\cdot 1(1+1)(1+2)$$
   - Krok 2: předpokládejme, že pro pevné $n \in \mathbb{N}$ platí
   $$\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$
   - Krok 3: chceme tvrzení ukázat pro $n+1$. Tedy chceme ukázat
   $$\sum_{k=1}^{n+1} k(k+1) = \frac{1}{3}(n+1)(n+2)(n+3)$$

Máme

$$\sum_{k=1}^{n+1} k(k+1) = \left(\sum_{k=1}^{n} k(k+1)\right) + (n+1)(n+2)$$
$$\overset{\text{ind. př}}{=} \frac{1}{3}n(n+1)(n+2) + (n+1)(n+2)\frac{1}{3}\cdot 3 = \frac{1}{3}(n+1)(n+2)(n+3).$$

(c) $\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + \cdots n^3 = (1+2+\cdots+n)^2$

Řešení:

- Krok 1: pro $n = 1$:
$$1^3 = 1^2$$
- Krok 2: předpokládejme, že pro pevné $n \in \mathbb{N}$ platí
$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = (1+2+\cdots+n)^2$$
- Krok 3: chceme tvrzení ukázat pro $n+1$. Neboli chceme
$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = (1+2+\cdots+n+n+1)^2$$

  Tedy

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k^3\right) + (n+1)^3 \overset{\text{ind. př}}{=} (1+2+\cdots+n)^2 + (n+1)^3$$
$$= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3 = \frac{(n+1)^2(n+4n+4)}{4} = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$
$$= \left(\frac{(n+2)(n+2)}{2} = (1+2+3+\cdots n+(n+1))^2\right)^2.$$

(d) $2n^2 \geq (n+1)^2$; od jakého $n \in \mathbb{N}$ tvrzení platí?

Řešení:

- Krok 1: postupným zkoušením zjistíme, že tvrzení zřejmě bude platit až pro $n \geq 3$. Pro $n = 3$:
$$2 \cdot 3^2 \geq (3+1)^2.$$
- Krok 2: předpokládejme, že pro pevné $n \in \mathbb{N}$ platí
$$2n^2 \geq (n+1)^2$$
  .
- Krok 3: chceme tvrzení ukázat pro $n+1$. Tedy chceme
$$2(n+1)^2 \geq (n+2)^2 = n^2 + 4n + 4.$$

  Pak

$$2(n+1)^2 = 2n^2 + 4n + 2 \overset{\text{ind. př}}{\geq} (n+1)^2 + 4n + 2 = n^2 + 6n + 3$$
$$= n^2 + 4n + 4 + (2n-1) \geq (n+2)^2$$

  V posledním kroku jsme využili faktu, že $n \geq 3$.

(e) $2^n \geq n^2$; od jakého $n \in \mathbb{N}$ tvrzení platí?
Řešení:

- Krok 1: pro $n = 4$:
$$2^4 \geq 4^2$$
- Krok 2: předpokládejme, že pro pevné $n \in \mathbb{N}$ platí
$$2^n \geq n^2.$$
- Krok 3: chceme tvrzení ukázat pro $n + 1$. Tedy chceme ukázat
$$2^{n+1} \geq (n+1)^2.$$
Tedy
$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \overset{\text{ind. př}}{\geq} 2n^2 \geq (n+1)^2$$
Poslední krok plyne z předchozího příkladu.

(f) $3 \mid (n^3 + 2n)$ (číslo 3 dělí výraz $n^3 + 2n$). Umíte dokázat i bez indukce?
Řešení:

- Krok 1: pro $n = 1$:
$$3|(1^3 + 2 \cdot 1)$$
- Krok 2: předpokládejme, že pro pevné $n \in \mathbb{N}$ platí
$$3|(n^3 + 2n)$$
- Krok 3: chceme tvrzení ukázat pro $n + 1$. Tedy chceme ukázat
$$3|((n+1)^3 + 2(n+1))$$
Máme
$$((n+1)^3 + 2(n+1)) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 2n + 2 = (n^3 + 2n) + 3(n^2 + n + 1)$$
Z indukčního předpokladu víme, že $3|(n^3 + 2n)$, navíc zjevně $3|3(n^2 + n + 1)$.

(g) Matematickou indukcí dokažte, že v konvexním n-úhelníku existuje právě $n(n-3)/2$ úhlopříček.
Řešení:

- Krok 1: pro $n = 3$ - trojúhelník má $3(3 - 3)/2 = 0$ úhlopříček - pravda.
zkusme ještě $n = 4$ - čtyřúhelník má $4(4 - 3)/2 = 2$ úhlopříčky - platí.
- Krok 2: předpokládejme, že pro pevné $n \in \mathbb{N}$ platí, že konvexní n-úhelník má $n(n - 3)/2$ úhlopříček.
- Krok 3: chceme tvrzení ukázat pro $n + 1$. Chceme ukázat, že konvexní $n + 1$-úhelník má $(n + 1)(n + 1 - 3)/2$ úhlopříček.
Úvaha: přidáme-li k n-úhelníku 1 bod, tak přibude $n - 2$ nových úhlopříček (přibudou spojnice ke všem bodům krom přímých sousedů) a navíc 1 původní strana se stane úhlopříčkou. Tedy počet úhlopříček bude:
$$\frac{n(n-3)}{2} + n - 2 + 1 = \frac{n^2 - 3n + 2n - 2}{2} = \frac{n^2 - n - 2}{2} = \frac{(n+1)(n-2)}{2}.$$

Supremum, infimum

2. Najděte supremum, infimum, minimum a maximum následujících množin v $\mathbb{R}$:

Řešení:

	inf	min	max	sup
$\mathbb{N}$	1	1	$\nexists$	∞
$(0;2]$	0	$\nexists$	2	2
$(0;1)\cap\mathbb{Q}$	0	$\nexists$	$\nexists$	1
$\left\{x\in\mathbb{Z}; x\geq-\sqrt{6}\right\}$	-2	-2	$\nexists$	∞
$\{(-1)^n\sqrt{n}; n\in\mathbb{N}\}$	$-\infty$	$\nexists$	$\nexists$	∞
$\{\arctan x; x\in\mathbb{R}\}$	$-\frac{\pi}{2}$	$\nexists$	$\nexists$	$\frac{\pi}{2}$
$\left\{1-\frac{1}{n}; n\in\mathbb{N}\right\}$	0	0	$\nexists$	1
$\left\{\frac{1+(-1)^n}{2}; n\in\mathbb{N}\right\}$	0	0	1	1
$\left\{\cos\frac{n\pi}{2}; n\in\mathbb{N}\right\}$	-1	-1	1	1
$\{(-1)^n n; n\in\mathbb{N}\}$	$-\infty$	$\nexists$	$\nexists$	∞

3. Uveďte příklad množiny, která má supremum, ale nemá maximum. Uveďte příklad množiny, která má infimum, ale nemá minimum.
Řešení: Např. $(0,1)$ v $\mathbb{R}$.

4. Nechť $A, B \subset \mathbb{R}$. Co lze říci o supremu a infimu následujících množin ve vztahu k $\sup A$, $\sup B$ a $\inf A$, $\inf B$?
Řešení: Označme $\inf A = i_A$, $\inf B = i_B$, $\sup A = s_A$, $\sup B = s_B$.

(a)
$$\inf(A\cup B) = \min\{i_A, i_B\}$$
$$\sup(A\cup B) = \max\{s_A, s_B\}$$

(b)
$$\inf(A\cap B) \geq \max\{i_A, i_B\}$$
$$\sup(A\cap B) \leq \min\{s_A, s_B\}$$

(c)
$$\inf(A\setminus B) \geq i_A$$
$$\sup(A\setminus B) \leq s_A$$

(d)
$$\inf(A\triangle B) \geq \min\{i_A, i_B\}$$
$$\sup(A\triangle B) \leq \max\{s_A, s_B\}$$

(e)
$$\inf(-A) = -s_A$$
$$\sup(-A) = -i_A$$

(f)
$$\inf(A+B) = i_A + i_B$$
$$\sup(A+B) = s_A + s_B$$

(g)

$$\inf(A - B) = i_A - s_B$$
$$\sup(A - B) = s_A - i_B$$

(h)

$$\inf(A \cdot B) = \min\{s_A s_B, s_A i_B, i_A s_B, i_A i_B\}$$
$$\sup(A \cdot B) = \max\{s_A s_B, s_A i_B, i_A s_B, i_A i_B\}$$