# 3. cvičení – Logika a zobrazení

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

## 1 Výroky

**Úloha 1.** Doplňte tabulku výroků

| $A$ | $B$ | $\neg A$ | $\neg B$ | $A \wedge B$ | $A \vee B$ | $A \Rightarrow B$ | $A \Leftrightarrow B$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | | | | | | |
| 1 | 0 | | | | | | |
| 0 | 1 | | | | | | |
| 0 | 0 | | | | | | |

**Úloha 2.** Doplňte tabulku výroků

| $A$ | $B$ | $\neg A$ | $\neg B$ | $\neg(A \wedge B)$ | $\neg A \vee \neg B$ | $\neg(A \vee B)$ | $\neg A \wedge \neg B$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | | | | | | |
| 1 | 0 | | | | | | |
| 0 | 1 | | | | | | |
| 0 | 0 | | | | | | |

**Úloha 3.** Doplňte tabulku výroků

| $A$ | $B$ | $\neg A$ | $\neg B$ | $\neg(A \Rightarrow B)$ | $A \wedge \neg B$ | $\neg B \Rightarrow \neg A$ | $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 0 | | | | |
| 1 | 0 | 0 | 1 | | | | |
| 0 | 1 | 1 | 0 | | | | |
| 0 | 0 | 1 | 1 | | | | |

**Úloha 4.** Sestavte tauotologie z výroků ve cvičení 1.-3. Kolik jste jich našli?

**Úloha 5.** Nechť $M$ je množina osob v této posluchárně a nechť $W(x, y)$ znamená: osoba $x \in M$ zná příjmení osoby $y \in M$. Přeformulujte následující výroky do češtiny a pak zkoumejte jejich platnost. Plynou některé výroky z ostatních? (Pozn.: $x$ a $y$ mohou být stejné.)

Příklad: $\exists y \in M \, \exists x \in M : W(x, y)$ lze zformulovat jako: existuje alespoň jedna osoba $y$ a jedna osoba $x$, že $x$ zná příjmení osoby $y$.

Volněji: je tu alespoň jeden člověk $y$ a jeho kamarád*ka $x$, který*á ho zná příjmením. Výrok bude nejspíš pravdivý.

1. $\forall x \in M \, \forall y \in M : W(x, y)$
2. $\forall x \in M \, \exists y \in M : W(x, y)$
3. $\forall y \in M \, \exists x \in M : W(x, y)$
4. $\exists x \in M \, \forall y \in M : W(x, y)$
5. $\exists y \in M \, \forall x \in M : W(x, y)$

**Úloha 6.** Uvažujme výrok: Nechť $n \in \mathbb{N}$. Jestliže $n^2$ je liché, pak $n$ je také liché. Jaké tvrzení budeme dokazovat při důkazu

1. přímo;
2. nepřímo;
3. sporem?

Zkuste tvrzení dokázat alespoň jednou metodou.

**Úloha 7.** Dokažte

1. $\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \in \mathbb{N} \; n \geq n_0 : 1/\sqrt{n} < \varepsilon$
2. $\forall k \in \mathbb{N} \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \in \mathbb{N} \; n \geq n_0 : \log n \geq k$

**Úloha 8.** Znegujte následující výrok a tuto negaci dokažte

1. $\exists A \in \mathbb{R} \; \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \in \mathbb{N}; n \geq n_0 : |(-1)^n - A| < \varepsilon$
2. $\forall k \in \mathbb{N} \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \in \mathbb{N}; n \geq n_0 : (-1)^n n \geq k$

---

# 2 Množiny a relace

**Úloha 9.** Nechť $A, B, C$ jsou množiny. Načrtněte Vennovy diagramy pro

1. $A \cap B^c$
2. $(A \cup B)^c$
3. $(A \cap B) \cup C$
4. $A \cap (B \cup C)$
5. $(A \cap B) \setminus C$
6. $A^c \cap B \cap C^c$

**Úloha 10.** Najděte předpis pro následující diagram

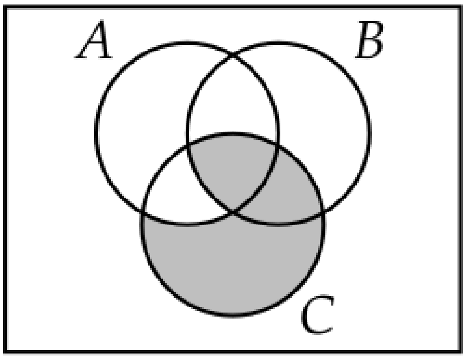


Figure 1: http://discrete.openmathbooks.org/pdfs/dmoi-tablet.pdf

**Úloha 11.** Symetrický rozdíl množin $A$ a $B$ je definován jako

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Ukažte, že platí

$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

(Pozn.: je třeba ukázat dvě inkluze „$\subseteq$“ a „$\supseteq$“.)

**Definice 12.** Nechť $A_1, \dots, A_n$ jsou množiny.

- Jejich *kartézským součinem* rozumíme množinu

  $$A_1 \times \cdots \times A_n = \{[a_1, \dots, a_n]; \; \forall i \in \{1, \dots, n\} : a_i \in A_i\},$$

  tedy množinu uspořádaných $n$-tic $[a_1, \dots, a_n]$.

- *Binární relací* $R$ mezi množinami $A$ a $B$ rozumíme libovolnou podmnožinu kartézského součinu $A \times B$. Často také hovoříme o *relaci mezi $A$ a $B$* nebo o *relaci z $A$ do $B$*. Příslušnost uspořádané dvojice $[a, b]$ do relace $R$ značíme $[a, b] \in R$ nebo $aRb$.

**Úloha 13.** Rozhodněte, zda platí následující tvrzení:

1. $(A \cap B = A) \Leftrightarrow (A \subset B)$
2. $(A \cup B = B) \Leftrightarrow (A \subset B)$
3. $(A \setminus B = C) \Leftrightarrow (A = B \cup C)$
4. $(X \times Y) = (Y \times X)$

**Úloha 14.** Nerovnost mezi reálnými čísly „$\leq$“ tvoří binární relaci na $[0, 1]$. Znázorněte tuto relaci graficky.

**Úloha 15.** Nechť $A$ je množina všech podmnožin množiny $\{1, 2\}$ a relace $R$ je býti vlastní podmnožinou, tedy $X\,R\,Y$ právě tehdy, když $X \subseteq Y$ a zároveň $X \neq Y$. Napište relaci $R$ jako množinu uspořádaných dvojic.

**Definice 16.** Nechť $R$ je relace na množině $X$. Řekneme, že $R$ je

- *symetrická*, jestliže $\forall x, y \in X;\ x\,R\,y \Rightarrow y\,R\,x$
- *antisymetrická*, jestliže $\forall x, y \in X;\ x\,R\,y \Rightarrow \neg\ y\,R\,x$
- *tranzitivní*, jestliže $\forall x, y, z \in X;\ x\,R\,y\ \&\ y\,R\,z \Rightarrow x\,R\,z$
- *reflexivní*, jestliže $\forall x \in X;\ x\,R\,x$

**Úloha 17.** Určete, zda následující relace jsou symetrické, antisymetrické, reflexivní a tranzitivní

1. $A$ je množina lidí, $R$ je relace "býti rodičem"
2. $A$ je množina celých čísel, $i\,R\,j$ právě tehdy, když $|i - j| = 1$.
3. $A = \mathbb{N}$, $i\,R\,j$ právě tehdy, když $i \cdot j$ je sudé.

---

## 3 Zobrazení

**Definice 18.** Binární relaci $F \subset A \times B$ nazýváme *zobrazením* neboli *funkcí* množiny $A$ do množiny $B$ (a zpravidla značíme $F : A \to B$), jestliže platí

$$\forall x \in A\ \forall y_1, y_2 \in B\colon\ (([x, y_1] \in F\ \&\ [x, y_2] \in F) \Rightarrow (y_1 = y_2)).$$

**Úloha 19.** Nechť $A = [0, 1]$, $B = [0, 2]$. Rozhodněte, která z následujících relací je grafem nějakého zobrazení:

1. $M_1 = \{[x, y] \in A \times B;\ x^2 + y^2 = 1\}$
2. $M_2 = \{[x, y] \in A \times B;\ y - x = 0\}$
3. $M_3 = \{[x, y] \in A \times B;\ x^2 + (y - 1)^2 = 1\}$

**Úloha 20.** Ukažte, že skládání zobrazení je asociativní operace, ale není komutativní. (Asociativní: $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$. Komutativní: $f(g(x)) = g(f(x))$. )

**Definice 21.** Nechť $A$ a $B$ jsou množiny a nechť $f : A \to B$ je zobrazení.

- Nechť $M \subset A$. Pak množinu
$$f(M) = \{y \in B;\ \exists x \in M\colon\ f(x) = y\}$$
nazýváme *obrazem množiny* $M$ při zobrazení $f$.
- Nechť $P$ je libovolná množina. Pak množinu
$$f^{-1}(P) = \{x \in A;\ f(x) \in P\}$$
nazýváme *vzorem množiny* $P$ při zobrazení $f$.

**Úloha 22.** Nechť $f : X \to Y$ je zobrazení, nechť $A \subset X$ a $B \subset Y$. Platí, že
$$f^{-1}(f(A)) = A, \qquad f(f^{-1}(B)) = B \qquad ?$$
Platí některá z inkluzí $\subset$ či $\supset$?
(Výrazem $f^{-1}$ nemyslíme inverzní funkci, ale vzor.)

**Úloha 23.** Nechť $f : X \to Y$ je zobrazení. Platí následující tvrzení? Platí alespoň jedna inkluze?

1. Pokud $A, B \subset X$, potom $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$,
2. Pokud $A, B \subset X$, potom $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$,
3. Pokud $A, B \subset Y$, potom $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$,
4. Pokud $A, B \subset Y$, potom $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.

**Definice 24.** Nechť $A$ a $B$ jsou množiny a nechť $f : A \to B$ je zobrazení.

(1) Řekneme, že $f$ je *prosté* (*injektivní*), jestliže
$$\forall x, y \in A\colon\ (f(x) = f(y) \ \Rightarrow\ x = y).$$

(2) Řekneme, že $f$ je *„na“* (*surjektivní*), jestliže
$$\forall y \in B\ \exists x \in A\colon\ f(x) = y.$$

(3) Řekneme, že $f$ je *bijekce* (*vzájemně jednoznačné*), jestliže je zároveň prosté a „na“.

**Úloha 25.** Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je zobrazení definované vzorcem $f(x) = x^2$. Určete vzory a obrazy množin $[0, 4]$, $[-4, 0]$ a $[-4, 4]$.

Je zobrazení $f$ prosté, na? Existuje inverzní zobrazení? Změní se tyto odpovědi, když budeme brát zobrazení $g : [0, 1] \to [0, 1]$ dané stejným předpisem $g(x) = x^2$?

**Úloha 26.** Najděte zobrazení (stačí obrázkem), která zobrazují:

1. interval $[0, 1]$ na interval $[0, \infty)$,
2. interval $(0, 1)$ na interval $[0, 1]$,
3. interval $[a, b]$ na interval $[0, 1]$.