

2. zápočtová písemka A

Jsou povoleny libovolné tištěné či psané materiály, leč žádná technika. Na písemku je 30 minut. Je třeba získat 50% bodů.

1. (10 bodů) Spočtete

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin x^2} - 1}{x^2}$$

2. (10 bodů) Spočtete

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{x}}$$

3. (10 bodů) Najděte derivaci následující funkce. Nezapomeňte na definiční obory funkce i derivace.

$$f(x) = \frac{\cos(x^3)}{1 + e^{-x}}$$

4. Bonusový příklad (za 0 bodů, ale za dobrý pocit):

Rozhodněte a odůvodněte, zda je následující tvrzení pravdivé.

Nechť existují $\lim_{x \rightarrow 0} \max\{f(x), g(x)\} \in \mathbb{R}$ a $\lim_{x \rightarrow 0} \min\{f(x), g(x)\} \in \mathbb{R}$.

Pak existují $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ a $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$.

2. zápočtová písemka B

Jsou povoleny libovolné tištěné či psané materiály, leč žádná technika. Na písemku je 30 minut. Je třeba získat 50% bodů.

1. (10 bodů) Spočtěte

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos 2x} - 1}{x^2}$$

2. (10 bodů) Spočtěte

$$\lim_{x \rightarrow 0} (2e^x - 1)^{\frac{1}{x}}$$

3. (10 bodů) Najděte derivaci následující funkce. Nezapomeňte na definiční obory funkce i derivace.

$$f(x) = (\sqrt[7]{x^4 + 2}) \cdot \arctan(3x)$$

4. Bonusový příklad (za 0 bodů, ale za dobrý pocit):

Rozhodněte a odůvodněte, zda je následující tvrzení pravdivé.

Nechť existují $\lim_{x \rightarrow 0} \max\{f(x), g(x)\} \in \mathbb{R}$ a $\lim_{x \rightarrow 0} \min\{f(x), g(x)\} \in \mathbb{R}$.

Pak existují $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ a $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$.

2. zápočtová písemka C

Jsou povoleny libovolné tištěné či psané materiály, leč žádná technika. Na písemku je 30 minut. Je třeba získat 50% bodů.

1. (10 bodů) Spočtete

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sqrt{e^{\sin x} + 2} - \sqrt{3}}$$

2. (10 bodů) Spočtete

$$\lim_{x \rightarrow 0} (-x^2 + \cos x)^{\frac{1}{x^2}}$$

3. (10 bodů) Najděte derivaci následující funkce. Nezapomeňte na definiční obory funkce i derivace.

$$f(x) = \frac{\log x}{(1 + \sqrt{x})^2}$$

4. Bonusový příklad (za 0 bodů, ale za dobrý pocit):

Sestrojte nekonzantní funkce f, g tak, aby pro každé $x \in \mathbb{R}$ platilo

$$f'(x)g'(x) = (fg)'(x).$$

2. zápočtová písemka D

Jsou povoleny libovolné tištěné či psané materiály, leč žádná technika. Na písemku je 30 minut. Je třeba získat 50% bodů.

1. (10 bodů) Spočtěte

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x^2)}{\sqrt{x^2+1}-1}$$

2. (10 bodů) Spočtěte

$$\lim_{x \rightarrow 0} (e^x + \tan x)^{\frac{1}{x}}$$

3. (10 bodů) Najděte derivaci následující funkce. Nezapomeňte na definiční obory funkce i derivace. (Jednostranné derivace nehledejte.)

$$f(x) = \sqrt[4]{1+x^6} \cdot \arcsin(2x)$$

4. Bonusový příklad (za 0 bodů, ale za dobrý pocit):

Sestrojte nekonzstantní funkce f, g tak, aby pro každé $x \in \mathbb{R}$ platilo

$$f'(x)g'(x) = (fg)'(x).$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\sin x^2} - 1}{x^2} \quad (1) \quad \text{VOLSF} \quad = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+\sin x^2 - 1}{x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\sin x^2} + 1} \stackrel{AL}{=} 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{1+0} + 1} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{x^2} = 1 \quad \text{Spq: } \approx 0$$

(5)

$$g(x) = x^2$$

$$f(y) = \frac{\sin y}{y}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 1$$

$$(P) \quad x^2 \neq 0 \text{ na } P(0, 1)$$



$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x} \log(1 + \sin x)} = e^1 = e \quad (1)$$

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + \sin x)}{\sin x} \cdot \frac{\sin x}{x} \stackrel{AL}{=} 1 \cdot 1$$

(3) VOLSF

$$f(y) = e^y$$

$$g(x) = \frac{1}{x} \log(1 + \sin x)$$

$$\lim_{y \rightarrow 1} e^y = e^1$$

$$(S) \quad e^y \text{ Spq: } \approx 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 1$$

VOLSF2

$$f(y) = \frac{\log(1+y)}{y}$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} f(y) = 1$$

$$(P) \quad \sin x \neq 0 \text{ na } P(0, \frac{1}{4})$$



$$g(x) = \sin x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$$

$$f(x) = \frac{\cos(x^3)}{1 + e^{-x}}$$

$$D_f = \mathbb{R} = D_{f1} \quad (1)$$

$$f' = \frac{-\sin(x^3) \cdot 3x^2 (1 + e^{-x}) - \cos(x^3) \cdot (e^{-x} \cdot (-1))}{(1 + e^{-x})^2}$$

(1)

$$(4+4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos 2x} - 1}{x^2} \stackrel{(1)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - 1}{x^2} \cdot \frac{1}{\underbrace{\sqrt{\cos 2x} + 1}_{\text{spj} \approx 0}} \stackrel{AL}{=} -2 \cdot \frac{1}{\sqrt{1+1}} = -1$$

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - 1}{4x^2} \cdot 4 \stackrel{AL}{=} -\frac{1}{2} \cdot 4 = -2$$

$$(5) \text{VOLSF } f(y) = \frac{\cos y - 1}{y^2} \quad \lim_{y \rightarrow 0} f(y) = -\frac{1}{2}$$

$$g(x) = 2x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} 2x = 0$$

$2x \neq 0 \approx P(0, 2)$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (2e^x - 1)^{1/x} \stackrel{(1)}{=} e^{\frac{1}{x} \log(2e^x - 1)} \stackrel{(1)}{=} e^2$$

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(2e^x - 1)}{2e^x - 1} \cdot \frac{2(e^x - 1)}{\underbrace{x}_{2 \cdot 1}} \stackrel{AL}{=} 1 \cdot 2 \cdot 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(2e^x - 1)}{2e^x - 1}$$

$$(5) \text{VOLSF } f(y) = \frac{\log y}{y - 1} \quad \lim_{y \rightarrow 1} \frac{\log y}{y - 1} = 1 \quad (P) \quad \begin{matrix} 2e^x - 1 \neq 1 \\ 2e^x \neq 2 \\ e^x \neq 1 \end{matrix} \text{ na } P(0, 5)$$

$$g(x) = 2e^x - 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} 2e^x - 1 = 1$$

$$(3) \text{VOLSF2 } f(y) = e^y$$

$$\lim_{y \rightarrow 2} e^y = e^2$$

(5) e^y spj ≈ 2

$$g(x) = \frac{1}{x} \log(2e^x - 1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 2$$

$$f(x) = \sqrt[7]{x^4 + 2} \cdot \arctan(3x)$$

$$(1) f_1 = f_1' = 12$$

(4)

$$f' = \frac{1}{7} \underbrace{(x^4 + 2)^{-6/7}}_{\frac{1}{7\sqrt[7]{(2+x^4)^6}}} \cdot 4x^3 \arctan 3x + \sqrt[7]{x^4 + 2} \cdot \frac{1}{1 + 9x^2} \cdot 3$$

(2c)

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sqrt{e^{\sin x} + 2} - \sqrt{3}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{e^{\sin x} + 2 - 3} (\sqrt{e^{\sin x} + 2} + \sqrt{3})$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{e^{\sin x} - 1} \cdot (\sqrt{e^{\sin x} + 2} + \sqrt{3}) \stackrel{AL}{=} 1 \cdot (\sqrt{3} + \sqrt{3})$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \text{spieg. test} \quad = 2\sqrt{3}$$

$$1 \quad 1 \quad \sqrt{e^0 + 2}$$

VOLSF = $f = \frac{y}{e^y - 1}$ $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{e^y - 1} = 1$ (D) $\sin x \neq 0$
 $g = \sin x$ $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$ na $P(0, \sqrt{3})$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} (-x^2 + \cos x)^{1/x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{1/x^2 \log(-x^2 + \cos x)} = e^{-3/2}$$

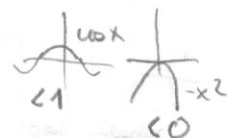
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(-x^2 + \cos x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(-x^2 + \cos x)}{-x^2 + \cos x - 1} \cdot \frac{-x^2 + \cos x - 1}{x^2} \stackrel{AL}{=} 1 \cdot (-1)$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$1 \quad 1 + \frac{1 - \cos x}{x^2} \rightarrow 1/2 = -3/2$$

VOLSF1 $f = e^y$ $\lim_{y \rightarrow 3/2} e^y = e^{3/2}$ (S) e^y spieg $x^{-3/2}$
 $g = \frac{1}{x^2} \log(-x^2 + \cos x)$ $\lim_{x \rightarrow 0} g = -3/2$ na $P(0, 1/4)$

VOLSF2 $f = \frac{\log(y)}{y - 1}$ $\lim_{y \rightarrow 1} f = 1$ (D) $-x^2 + \cos x \neq 1$
 $g = -x^2 + \cos x$ $\lim_{x \rightarrow 0} -x^2 + \cos x = 1$



$$(3) f = \frac{\log x}{(1 + \sqrt{x})^2}$$

$$b_f = b_{f'} = (0, \infty)$$

$$f' = \frac{\frac{1}{x} (1 + \sqrt{x})^2 - \log x \cdot 2(1 + \sqrt{x}) \cdot \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x}}}{(1 + \sqrt{x})^4}$$

(20)

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x^2)}{1+x^2 - 1} \cdot \left(\sqrt{1+x^2} + 1 \right) \stackrel{AL}{=} 1 \cdot (1+1)$$

$\downarrow$ spoj fast
 $\sqrt{1+0} + 1$

VOCSF $f = \frac{\log(1+y)}{y}$

$$\lim_{y \rightarrow 0} f = 1$$

(D) $x^2 \neq 0$ me $P(0,1)$

$$g = x^2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} (e^x + \tan x)^{1/x} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x} \log(e^x + \tan x)} = e^2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(e^x + \tan x)}{e^x + \tan x - 1} \cdot \frac{e^x - 1 + \tan x}{x} \stackrel{AL}{=} 1 \cdot (1+1) = 2$$

VOCSF 1 $f(y) = e^y$

$$\lim_{y \rightarrow 2} e^y = e^2 \quad (S) e^y \text{ spoj' } \approx 2$$

$$g(x) = \frac{\log(e^x + \tan x)}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g = 2$$

VOCSF 2 $f = \frac{\log(y)}{y-1}$

$$\lim_{y \rightarrow 1} f = 1$$

(D) $e^x + \tan x + 1$
me $P(0, 1/4)$

$$g = e^x + \tan x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^x + \tan x = 1$$

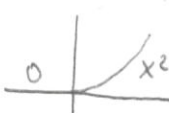
$\neq$ $\neq$

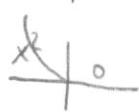
$$(3) f = \sqrt[4]{1+x^6} \cdot \arcsin(2x)$$

$$f' = \frac{1}{4} (1+x^6)^{-3/4} \cdot 6x^5 \cdot \arcsin(2x) + \sqrt[4]{1+x^6} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-(2x)^2}} \cdot 2$$

$$D_f: -1 \leq 2x \leq 1 \quad x \in [-1/2, 1/2]$$

$$D_{f'}: \quad x \in (-1/2, 1/2)$$

(4) Napr. $f:$ 

$g:$ 

pač $f \cdot g = 0$, tedy $(f \cdot g)' = 0$

havič $f' \cdot g' = 0$

(≈ 0 mutno dopocitat tuče, ale platí to).