1. zápočtová písemka – A

Jsou povoleny libovolné tištěné či psané materiály, leč žádná technika. Na písemku je 30 minut. Je třeba získat 50% bodů.

1. (10 bodů) Spočtěte
$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n} + \sqrt{n^5} + 7\log n}{\frac{8}{e^n} - 4^n + \cos(2n) - \frac{2\sqrt{n}}{n}}$$
2. (10 bodů) Spočtěte
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2-2} - \sqrt{n^4+n^2}}{5n^2}$$
3. (10 bodů) Spočtěte
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{5^n + n^3 + \frac{1}{\sqrt{n}}}$$
4. Bonusový příklad (za 0 bodů, ale za dobrý pocit):
   Rozhodněte, zda jsou pravdivá následující tvrzení.
   (a) Nechť $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = 0$. Pak posloupnost $\{a_n - b_n\}$ je omezená.
   (b) Posloupnost $\{a_n - b_n\}$ je omezená. Pak $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = 0$.

(3) 14

(1) $$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n} + \sqrt{n^5} + 7\log n}{\frac{8}{e^n} - 4^n + \cos 2n - \frac{2\sqrt{n}}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{4^n}{4^n} \cdot \frac{1 + \frac{n^{5/2}}{4^n} + 7\frac{\log n}{4^n}}{\frac{8}{4^n e^n} - 1 + \frac{(\cos 2n)}{4^n} - \frac{2}{\sqrt{n}\cdot 4^n}}$$

(2)

$\frac{n^{5/2}}{4^n} \to 0$ škála; $\frac{8}{4^n e^n} \to 0$; $\frac{(\cos 2n)}{4^n} \to 0$ om + miz (1); $\frac{2}{\sqrt{n}\cdot 4^n} \to 0$, $\frac{2}{\infty\cdot\infty}$

$$\overset{AL}{=} \frac{1 + 0 + 7\cdot 0}{8\cdot 0 - 1 + 0 - 0} = -1$$

(1) (1) (1)

(2) $$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2-2} - \sqrt{n^4+n^2}}{5n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^2} - 2 - n^4 - \cancel{n^2}}{5n^2\left(\sqrt{n^2-2} + \sqrt{n^4+n^2}\right)} =$$

(2)

$$= \lim \frac{n^4}{n^2\cdot n^2} \cdot \frac{-1 - \frac{2}{n^4}}{5\left(\sqrt{\frac{1}{n^2} - \frac{2}{n^4}} + \sqrt{1 + 1/n^2}\right)} \overset{AL}{=} \frac{-1-0}{5\left(\sqrt{0+0} + \sqrt{1+0}\right)} = -\frac{1}{5}$$

(1) (2) VoS, (2) (2) (1)

(3) $$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{5^n + n^3 + \frac{1}{\sqrt{n}}} = 5$$

$$5 = \sqrt[n]{5^n + 0 + 0} \le \sqrt[n]{5^n + n^3 + \frac{1}{\sqrt{n}}} \le \sqrt[n]{3\cdot 5^n} = \sqrt[n]{3}\cdot 5$$

$5 \to 5$ (2); $\to 5$ 2 pol. (1); (3) $\to 1\cdot 5$

$n^3 \le 5^n$ od jistého n_0, protože $\lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{5^n} = 0$ ze škály (2)

$\frac{1}{\sqrt{n}} \le 1 \le 5^n$ (2)

(4) (a) Nechť $\lim a_n + b_n = 0$. Pak $\{a_n - b_n\}$ je om.

Nepravda. Např. $a_n = n$, $b_n = -n$, $a_n + b_n = 0$, $a_n - b_n = 2n$

(b) Pol. $\{a_n - b_n\}$ je om. Pak $\lim (a_n + b_n) = 0$

Nepravda. Např. $a_n = n$, $b_n = n$, $\lim a_n + b_n = \lim 2n = 0$

1. zápočtová písemka – B

Jsou povoleny libovolné tištěné či psané materiály, leč žádná technika. Na písemku je 30 minut. Je třeba získat 50% bodů.

1. (10 bodů) Spočtěte
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2}{\sqrt{n^3}} - 3n^n + \log n + 5\cdot 2^n}{2n^n - 6\sin n^2 - 2^n}$$
2. (10 bodů) Spočtěte
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{6n}\left(\sqrt{n-1} - \sqrt{n+1}\right)$$
3. (10 bodů) Spočtěte
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n + \cos n}$$
4. Bonusový příklad (za 0 bodů, ale za dobrý pocit):
   Rozhodněte, zda jsou pravdivá následující tvrzení.
   (a) Nechť $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \infty$. Pak $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je zdola omezená.
   (b) Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je konvergentní posloupnost. Pak
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1.$$

1B

(1) $$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2}{\sqrt{n^3}} - 3n^n + \log n + 5\cdot 2^n}{2n^n - 6\sin n^2 - 2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{n^n}\cdot \frac{\frac{2}{\sqrt{n^3}\cdot n^n} - 3 + \frac{\log n}{n} + \frac{5\cdot 2^n}{n^n}}{2 - \frac{6\sin n^2}{n^n} - \frac{2^n}{n^n}}$$

(3) $0 \leftarrow \frac{2}{\infty}$; 0 škála ; (2)

$\frac{6\sin n^2}{n^n} \to 0$ om + niz (2) ; $\frac{2^n}{n^n} \to 0$ škála

$$\overset{VOAL}{=} \frac{0-3+0+0}{2-0-0} = -\frac{3}{2}$$

(1) (1) (1)

(2) $$\lim_{n\to\infty} \sqrt{6n}\left(\sqrt{n-1} - \sqrt{n+1}\right) = \lim \frac{\sqrt{6n}\,(n-1-n-1)}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n+1}} =$$ (2)

$$= \lim \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}}\cdot \frac{\sqrt{6}\cdot(-2)}{\sqrt{1-1/n}+\sqrt{1+1/n}} \overset{AL}{=} \frac{-2\cdot\sqrt{6}}{\sqrt{1-0}+\sqrt{1+0}} = -\sqrt{6}$$

(1) (2) (2) (1)

V o $\sqrt{\ }$ (2)

(3) $$\lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{3^n + \cos n} = 3$$

$$\sqrt[n]{\tfrac{1}{2}3^n} \le \sqrt[n]{3^n-1} \le \sqrt[n]{3^n+\cos n} \le \sqrt[n]{3^n+1} \le \sqrt[n]{2\cdot 3^n} = 3\sqrt[n]{2}$$

$\downarrow$ 3 (3) ; $\downarrow$ 3 — 2 pol. (1) ; (2) ; $\downarrow$ 3

$1 \le 3^n$ ✓ (1)

$3^n - 1 \ge \frac{1}{2}3^n$ (3)

$\frac{1}{2}3^n \ge 1$

$3^n \ge 2$ ✓

(4) (a) $\lim (a_n+b_n) = \infty$ Pak $\{a_n\}$ je zdola om.

Nepravda. Např. $a_n = -n$ $b_n = n^2+n$

(b) $\{a_n\}$ je konv. Pak $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$.

Nepravda. Např. $a_n = q^n$, $|q|<1$ pak $\lim \frac{q^{n+1}}{q^n} = \lim q = q \neq 1$