1. cvičení – Cyklometrické funkce

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Příklady

1. Spočtěte

   (a) $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$

   (b) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$

   (c) $\arccos 1 = 0$

   (d) $\arccos 0 = \frac{\pi}{2}$

   (e) $\arctan \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$

   (f) $\arctan -1 = -\frac{\pi}{4}$

   (g) $\operatorname{arccot} -1 = \frac{3\pi}{4}$

   (h) $\operatorname{arccot} \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{3}$

2. Najděte všechna $x \in \mathbb{R}$, pro která platí, že $\sin x = \frac{1}{2}$.
   Řešení: základní hodnoty: $x_1 = \frac{\pi}{6}$, $x_2 = \frac{5\pi}{6}$ Celkem: $x \in \{\frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

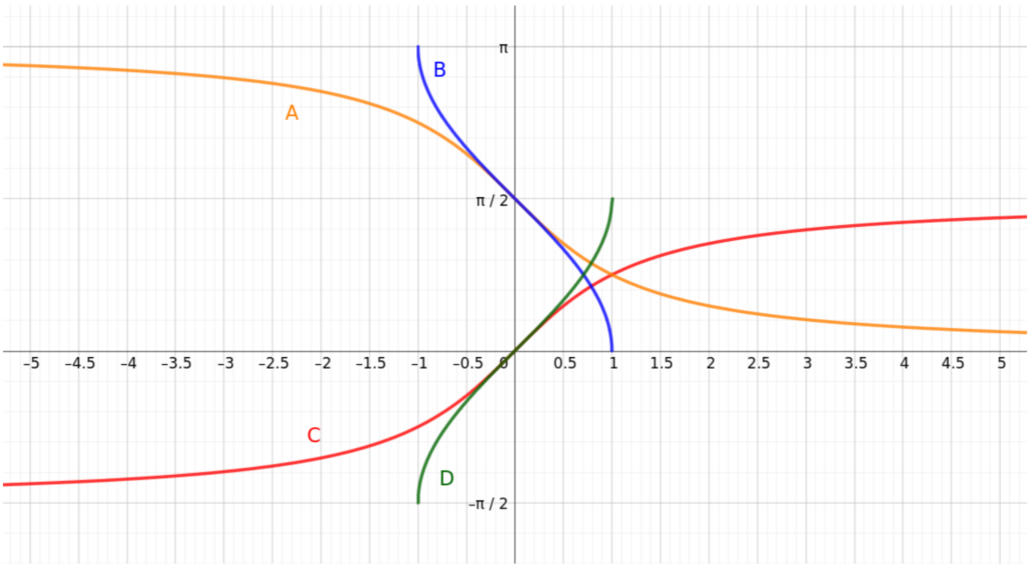
3. Najděte grafy

   (a) $\arcsin x$ zelený

   (b) $\arccos x$ modrý

   (c) $\arctan x$ červený

   (d) $\operatorname{arccot} x$ žlutý



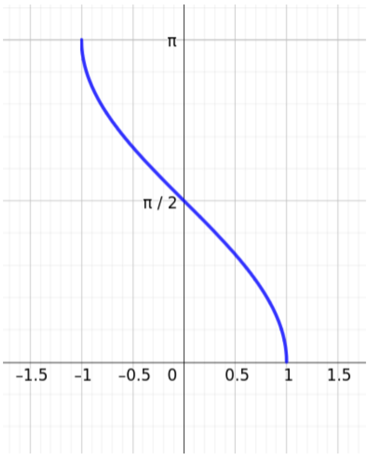
4. Který předpis patří k obrázku?
Řešení: Všechny.

A $\arccos x$

B $|\arccos x|$

C $\frac{\pi}{2} - \arcsin x$

D $\pi - \arccos(-x)$



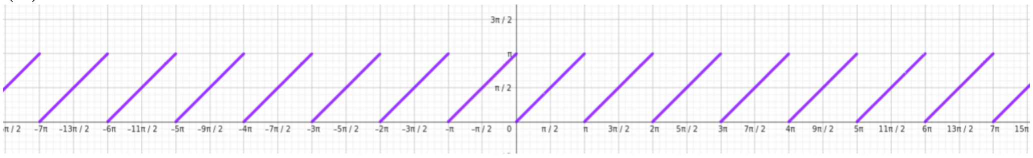
5. Najděte pravdivé výroky

ANO $\arcsin(\sin \frac{\pi}{6}) = \frac{\pi}{6}$
ANO $\sin(\arcsin \frac{\pi}{6}) = \frac{\pi}{6}$
NE $\arcsin(\sin \frac{2\pi}{3}) = \frac{2\pi}{3}$ - neplatí
NE $\sin(\arcsin \frac{\pi}{3}) = \frac{\pi}{3}$ - vnitřek vůbec není definován

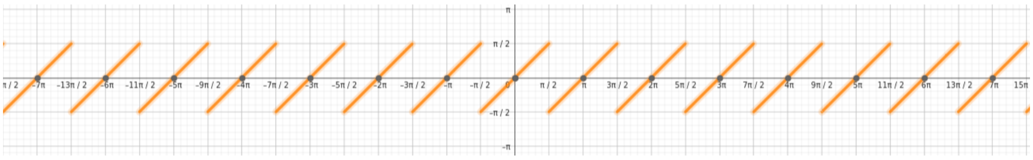
6. Přiřaďte funkci správný graf

(a) $\arcsin(\sin x)$	(c) $\arctan(\tan x)$	(e) $\sin(\arcsin x)$	(g) $\tan(\arctan x)$
(b) $\arccos(\cos x)$	(d) $\operatorname{arccot}(\cot x)$	(f) $\cos(\arccos x)$	(h) $\cot(\operatorname{arccot} x)$

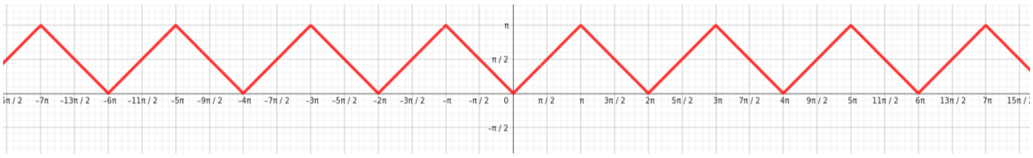
(d)



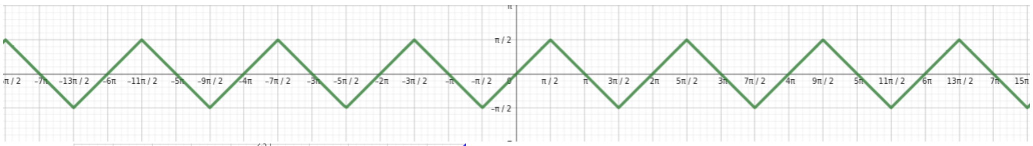
(c)

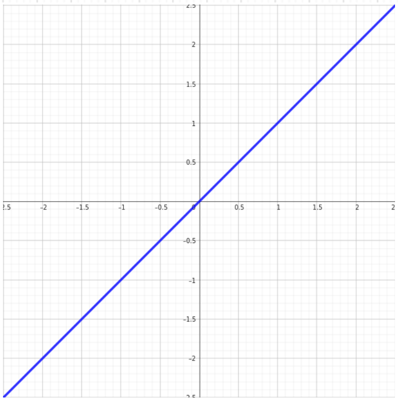


(b)

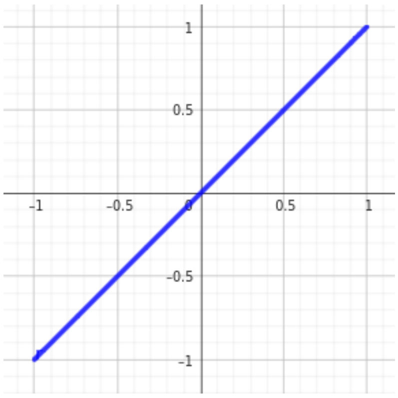


(a)





(h,g)



(e,f)

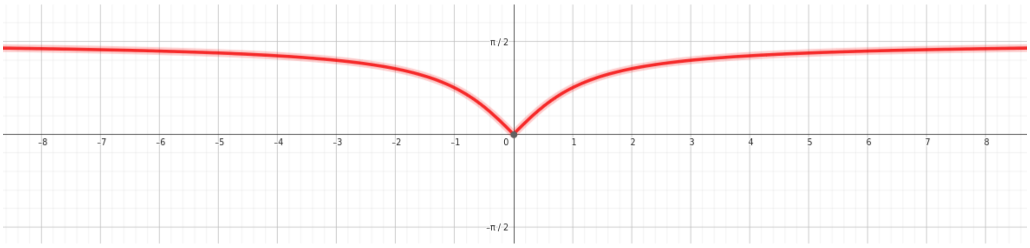
7. Najděte předpis
   Řešení: ACD

   A $\arctan |x|$

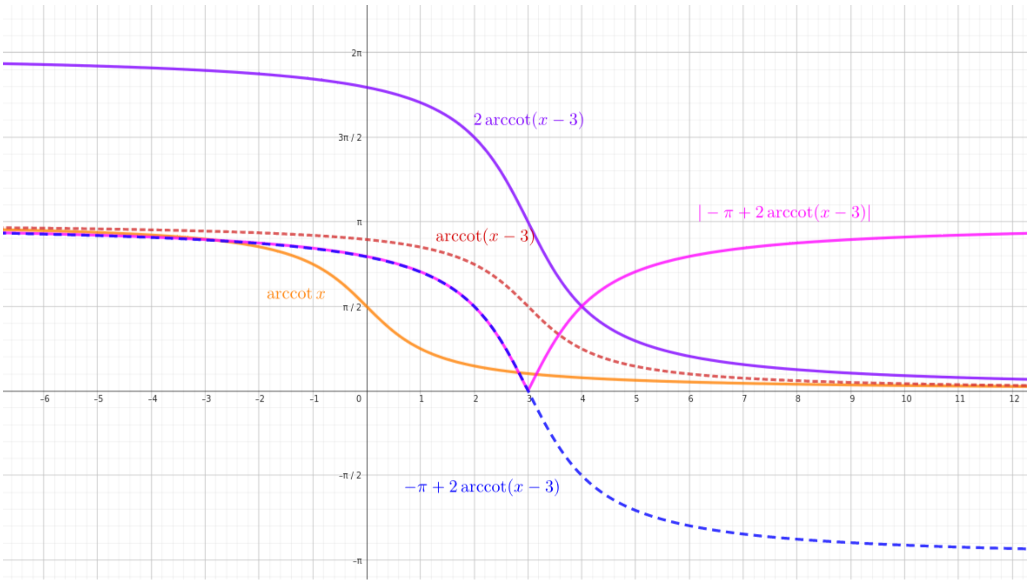
   B $\arctan -|x|$

   C $|\arctan x|$

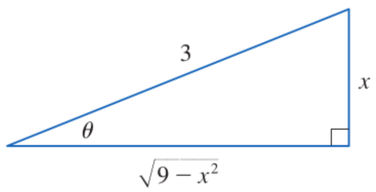
   D $|\arctan(-x)|$



8. Načrtněte graf funkce $f(x) = |-\pi + 2\,\mathrm{arccot}(x-3)|$



9. (a) Uvažujme $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ a položme $x = 3\sin\theta$. Porovnejme s obrázkem. Ukažte, že $\sqrt{9-x^2} = 3\cos\theta$ a $\cot\theta = \frac{\sqrt{9-x^2}}{x}$.



https://www.stewartcalculus.com/data/CALCULUS%20Concepts%20and%20Contexts/upfiles/3c3-TrigonometSubstitu_Stu.pdf

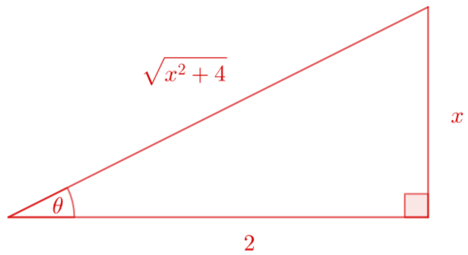
Řešení:
Protože pro $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ je $\cos\theta > 0$, tak platí $|\cos\theta| = \cos\theta$. Tedy máme

$$\sqrt{9-x^2} = \sqrt{9-9\sin^2\theta} = \sqrt{9(1-\sin^2\theta)} = 3\sqrt{\cos^2\theta} = 3|\cos\theta| = 3\cos\theta,$$

což jsme chtěli ukázat. Analogicky

$$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{\frac{1}{3}\sqrt{9-x^2}}{\frac{1}{3}x} = \frac{\sqrt{9-x^2}}{x}$$

(b) Uvažujme $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ a položme $x = 2\tan\theta$. Načrtněte obrázek a ukažte, že $\frac{2}{\cos\theta} = \sqrt{x^2+4}$.
Řešení:



Prve ověřme hint:

$$1 + \tan^2\theta = 1 + \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{\cos^2\theta + \sin^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

Tedy

$$\frac{1}{\cos^2\theta} = 1 + \frac{x^2}{4}$$

Pak

$$\frac{1}{\cos^2\theta} = \frac{4+x^2}{4}$$

Protože pro $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ je $\cos\theta > 0$, tak platí $|\cos\theta| = \cos\theta$. Tedy máme

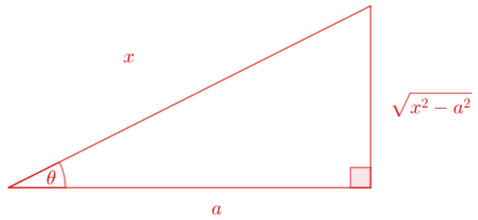
$$\frac{1}{\cos\theta} = \frac{\sqrt{4+x^2}}{2}$$

Závěrem

$$\frac{2}{\cos\theta} = \sqrt{4 + x^2}$$

(c) Uvažujme $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $a > 0$ a položme $x = a\frac{1}{\cos\theta}$. Načrtněte obrázek a vyjádřete $\frac{1}{\cos\theta} + \tan\theta$ pomocí x (ukažte bez pomoci obrázku).

Řešení:



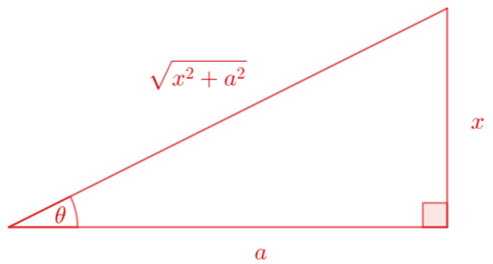
Protože pro $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ je $\tan\theta > 0$, tak platí $|\tan\theta| = \tan\theta$.

Máme

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos\theta} &= \frac{x}{a} \\ \tan^2\theta &= \frac{1}{\cos^2\theta} - 1 = \frac{x^2}{a^2} - 1 = \frac{x^2 - a^2}{a^2} \\ \tan\theta &= \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a} \end{aligned}$$

(d) Uvažujme $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $a > 0$ a položme $x = a\tan\theta$. Načrtněte obrázek a vyjádřete $\sin\theta$ pomocí x (ukažte bez pomoci obrázku).

Řešení:



Máme

$$\tan^2\theta = \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{\sin^2\theta}{\frac{1}{1+\tan^2\theta}}$$

Odtud

$$\sin^2\theta = \frac{\tan^2\theta}{1 + \tan^2\theta}$$

Protože pro $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ má $\sin\theta$ a $\tan\theta$ stejné znaménko, po odmocnění vyjde

$$\sin\theta = \frac{\tan\theta}{\sqrt{1 + \tan^2\theta}} = \frac{\frac{x}{a}}{\sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2}}} = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$